Министерство образования и науки РД
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Профессионально - педагогический колледж имени М. М. Меджидова»

РЕКОМЕНДОВАНО К УТВЕРЖДЕНИЮ
методическим советом ГБПОУ
«Профессионально - педагогический колледж имени М. М. Меджидова»
Председатель методического совета
____
Подпись ФИО
___ ___________2020 г.

УТВЕРЖДАЮ
Директор ГБПОУ
«Профессионально - педагогический колледж имени М. М. Меджидова»
____
Подпись ФИО
___ _____________2020 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01. МАТЕМАТИКА
Основной образовательной программы по специальности
44.02.02 Преподавание в начальных классах

Составители: Османова М.С., преподаватель математики высшей категории,
Шерифова Л. С., преподаватель математики высшей категории.

Избербаш 2020

1. ВВЕДЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Учебно-методический комплекс по дисциплине Математика создан Вам в помощь для работы на занятиях, при выполнении домашнего задания и подготовки к текущему и итоговому контролю по дисциплине.

УМКД включает теоретический блок, перечень практических занятий, задания по самостоятельному изучению тем дисциплины, вопросы для самоконтроля, перечень точек рубежного контроля, а также вопросы и задания по промежуточной аттестации.

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, Вы должны внимательно изучить список рекомендованной основной и вспомогательной литературы. Из всего массива рекомендованной литературы следует опираться на литературу, указанную как основную.

По каждой теме в УМК перечислены основные понятия и термины, вопросы, необходимые для изучения (план изучения темы), а также краткая информация по каждому вопросу из подлежащих изучению. Наличие тезисной информации по теме позволит вам вспомнить ключевые моменты, рассмотренные преподавателем на занятии.

Основные понятия курса приведены в глоссарии.

После изучения теоретического блока приведён перечень практических работ, выполнение которых обязательно. Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачёта по дисциплине, поэтому в случае отсутствия на уроке по уважительной или неуважительной причине Вам потребуется найти время и выполнить пропущенную работу.

В процессе изучения дисциплины предусмотрена самостоятельная внеаудиторная работа, включающая домашние письменные работы, выполнение заданий преподавателя, рефераты.

Содержание рубежного контроля (точек рубежного контроля) составлено на основе вопросов самоконтроля, приведённых по каждой теме.

По итогам изучения дисциплины проводится экзамен.

В зачётную книжку выставляется дифференцированная оценка.

В результате освоения дисциплины Вы должны **уметь:**

-применять математические методы для решения профессиональных задач;
-выполнять операции над множествами;
-решать текстовые задачи;
-определять отношения между математическими понятиями;
-выявлять структуру математических предложений;
-определять истинность высказываний и высказывательных форм;
-выполнять приближённые вычисления;
-проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований, представлять полученные данные графически.

В результате освоения дисциплины Вы должны **знать:**

-понятие множества, отношения между множествами, операции над ними;
-понятие величины и её измерения;
-историю создания систем единиц величины;
-этапы развития понятий натурального числа и нуля;
-системы счисления;
-понятие текстовой задачи и процесса её решения;
-математические понятия и отношения между ними;
-виды математических предложений и их структуру;

-определение истинности высказываний и высказывательных форм;
-историю развития геометрии;
-основные свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве;
-правила приближённых вычислений;
-методы математической статистики.

В результате освоения дисциплины у Вас должны формироваться общие компетенции (ОК):

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с руководством, коллегами и социальными партнёрами.

Учитель начальных классов должен обладать профессиональными компетенциями, соответствующими основным видам профессиональной деятельности:

ПК 1.1. Определять цели и задачи, планировать уроки.

ПК 1.2. Проводить уроки.

ПК 2.1. Определять цели и задачи внеурочной деятельности и общения, планировать внеурочные занятия.

ПК 2.2. Проводить внеурочные занятия.

ПК 4.2. Создавать в кабинете предметно-развивающую среду.

Внимание! Если в ходе изучения дисциплины у Вас возникают трудности, то Вы всегда можете прийти на дополнительные занятия к преподавателю, которые проводятся согласно графику. Время проведения консультаций Вы сможете узнать у преподавателя, а также познакомившись с графиком их проведения, размещённом в кабинете математики.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАРШРУТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Формы отчётности, обязательные для сдачи	**количество**
Лабораторные занятия	не предусмотрено
Практические занятия	34 час.
Точки рубежного контроля	6
Итоговая аттестация	экзамен

Желаем Вам удачи!

Составители: Османова М.С., преподаватель ГБПОУ «Профессионально - педагогический колледж имени М.М.Меджидова»

Шерифова Л. С., преподаватель математики высшей категории.

Учебно- методический комплекс по дисциплине «Математика» (УМКД) является частью программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ) по специальности 44.02.02 «Преподавание в начальных классах», разработанной в соответствии с примерной программой ФГОС третьего поколения.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Математика» адресован студентам очной формы обучения.

УМКД включает теоретический блок, перечень практических занятий, задания по самостоятельному изучению тем дисциплины, вопросы для самоконтроля, перечень точек рубежного контроля, а также вопросы и задания по промежуточной аттестации.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

РАЗДЕЛ 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

Тема 1.1. Понятие множества и элемента множества. Способы задания множеств.

Основные понятия и термины по теме:

множество, элемент множества, пустое множество, конечные и бесконечные множества, обозначение множества и элемента множества латинскими буквами; задание множества, способы задания множеств, понятие характеристического свойства элементов множества.

План изучения темы:

1. Понятие множества. Обозначение множеств.
2. Пустое множество и его обозначение.
3. Элемент множества и его обозначение.
4. Конечные и бесконечные множества.
5. Примеры бесконечных числовых множеств (N- натуральных чисел, Z- целых чисел, Q- рациональных, R- действительных чисел).
6. Понятие заданного множества.
7. Способы задания множеств.

Краткое изложение теоретических вопросов.

Под множеством понимают группу объектов, рассматриваемых как единое целое. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A,B,C,…,Z. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом ø. Объекты, из которых образовано множество, называют элементами множества. Их обозначают строчными латинскими буквами: а, в, с,…,z. Элемент множества может принадлежать или не принадлежать данному множеству. Это обозначается так: aϵA, aϵA.

Множества могут быть конечными и бесконечными. Примеры бесконечных числовых множеств: N- натуральных чисел, Z- целых чисел, Q- рациональных, R- действительных чисел.

Множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество можно задать двумя способами: 1)перечислением его элементов; 2)указанием характеристического свойства его элементов.

Характеристическое свойство- это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Практическое занятие - «Множества».

Задания для самостоятельного выполнения:

1.§1, п.1, упр. 8,9. 2.п.2, упр. 9,10,11.

Проказница-Мартышка,
Осел,
Козел
Да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки, -
Пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
"Стой, братцы, стой! — кричит Мартышка. -
Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
Ты с басом, Мишенька, садись против альта,

Я, прима, сяду против вторы;
Тогда пойдет уж музыка не та:
У нас запляшут лес и горы!"
Расселись, начали Квартет;
Он все-таки на лад нейдет.
"Постойте ж, я сыскал секрет? -
Кричит Осел, — мы, верно, уж поладим,
Коль рядом сядем".
Послушались Осла: уселись чинно в ряд;
А все-таки Квартет нейдет на лад.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть.
Случилось Соловью на шум их прилететь.
Тут с просьбой все к нему, чтоб их решить сомненье.
"Пожалуй, — говорят, — возьми на час терпенье,
Чтобы Квартет в порядок наш привесть:
И ноты есть у нас, и инструменты есть,
Скажи лишь, как нам сесть!" -
"Чтоб музыкантом быть, так надобно уменье
И уши ваших понежней, -
Им отвечает Соловей, -
А вы, друзья, как ни садитесь;
Всё в музыканты не годитесь".

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множество может быть задано *перечислением* всех его элементов или описанием характеристического свойства его элементов. *Характеристическим свойством* называется такое свойство, которым обладают все элементы данного множества и не обладают никакие другие объекты. Например, запись А = { *x* | *x – житель Саратова* } означает, что множество А состоит из жителей Саратова.

Множества, состоящие из чисел, называют числовыми множествами.

N– множество натуральных чисел,
Z– множество целых чисел,
$\boldsymbol{N}_0$ или $\boldsymbol{Z}_0$ – множество целых неотрицательных чисел,
Q– множество рациональных чисел,
R– множество действительных чисел.

Задания для самостоятельной работы по теме 1:

Назовите и запишите множество зверей из басни
И.А. Крылова «Квартет», используя способ:
а) перечисления элементов;
б) задания характеристического свойства.
Принадлежит ли Соловей этому множеству?
Приведите примеры множеств, элементами которых являются :
а)неодушевленные предметы,
б)геометрические фигуры,
в)животные,
г)растения.
Задайте множество с помощью перечисленных элементов:
$X=\{x/x \in N, 0 \leq x \leq 4\}$
$X=\{x/x \in N, -2 \leq x \leq 6\}$

X={x/x ∈ Z, -3 ≤ x ≤ 5}

X={x/x ∈ Z, 0 ≤ x ≤ 4}

В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им: **а)**{ *треугольник, квадрат, трапеция, круг, правильный шестиугольник* }; **б)**{ *лев, лисица, гиена, слон, рысь* }; **в)**{ *бежать, смотреть, синий, знать, читать* }; **г)**{2, 6, 15, 84, 156}; **д)**{1, 9, 67, 81, 121}.

Тема 1.2.Отношения между множествами.

Основные понятия и термины по теме:

пересекающиеся множества, подмножество множества, равные множества.

План изучения темы:

1.Понятие пересекающихся множеств. Изображение при помощи кругов Эйлера.

2.Определение подмножества. Обозначение подмножества. Изображение при помощи кругов Эйлера.

3. Определение равных множеств. Изображение при помощи кругов Эйлера.

Краткое изложение теоретических вопросов.

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Например, нам известно, что все натуральные числа являются целыми. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями, позволяет посмотреть на них с единой точки зрения.

Если множества А я В имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно А и В, то говорят, что эти множества пересекаются.

Например, если А = {a, b, c, d, e}, В = {b, d, k,m), С = {x, y, z}, то можно утверждать, что множества А и В пересекаются, так как имеют общие элементы b и d, а множества А и С, В и С не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим теперь множества А = {a, b, c, d, e} и В = {c, d, e). Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества В является элементом множества А. В этом случае говорят, что множество В включается в множество А или что множество В является подмножеством множества А и пишут В ⊆ А.

Определение. **Множество В является подмножеством множества А, если каждый элемент множества В является также элементом множества А. Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.**

Из определения следует, что если В ⊆ А, то множество В может быть пустым, и тогда Ø ⊆ А, и, кроме того, множество В может совпадать с А, и тогда А ⊆ А. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества А должно быть обязательно пустое множество и само множество А.

Образуем, например, все подмножества множества А = {2, 3, 4}. Среди них будут одноэлементные подмножества: {2}, {3}, {4}, двухэлементные: {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, а также само множество А и пустое множество 0. Таким образом, данное трехэлементное множество А имеет 8 подмножеств.

Доказано, что если множество А содержит и элементов, то у него 2^n различных подмножеств.

Рассмотрим теперь множества А = {a, b, c, d, e} и В = {c, a, d, b, e}. Они пересекаются, и каждый элемент множества А является элементом множества В, т.е. А с В, и наоборот, каждый элемент множества В является элементом множества А, т.е. В с. А. В этом случае говорят, что множества А и В равны и пишут А-В.

Определение. **Множества А и В называются равными, если А ⊆ В и В ⊆ А**.

Из определения следует, что равные множества состоят из одних и тех же элементов и что порядок записи элементов множества не существен.

Отношения между множествами наглядно представляют при помощи особых чертежей, называемых кругами Эйлера.

Для этого множества представляют в виде кругов, овалов или любых других геометрических фигур. В том случае, если множества А и В имеют общие элементы, но ни одно из них не является подмножеством другого, их изображают так, как

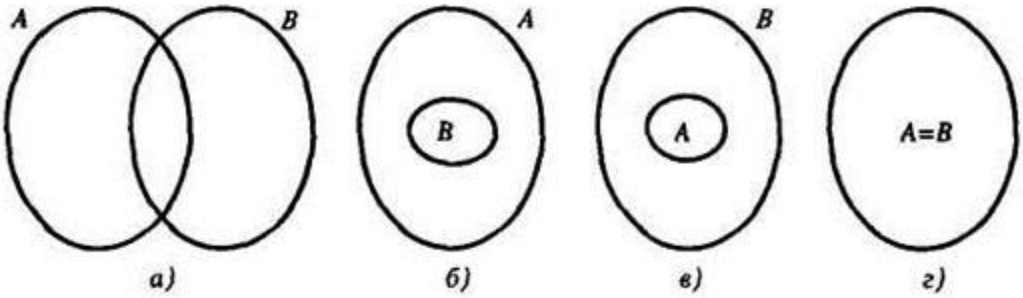


Рис. 4

показано на рис. 4а. Если множество В является подмножеством А, то круг, изображающий множество В, целиком находится в круге, изображающем множество А (рис. 4б). Если А с В, то множества А и В изображают так, как на рисунке 4в. Равные множества представляют в виде одного круга (рис. 4г).

Если множества А и В не пересекаются, то их изображают в виде двух фигур, не имеющих общих точек (рис. 5).

Понятие подмножества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например: «Назови среди данных чисел четные», «Среди данных четырехугольников найди прямоугольники».

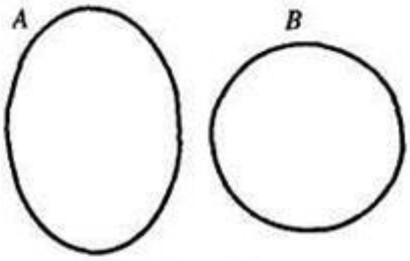


Рис. 5

Практические занятия, лабораторные работы – не предусмотрены.

Задания для самостоятельного выполнения:

§1, п.3, упр.6,8.

Тема 1.3.1.Пересечение множеств.

Основные понятия и термины по теме:

пересечение множеств А и В; примеры нахождения пересечения множеств, заданных перечислением их элементов и заданием характеристического свойства элементов; символическое обозначение пересечения множеств и его изображение при помощи кругов Эйлера.

План изучения темы:

1.Определение пересечения множеств. Изображение при помощи кругов Эйлера.

2.Примеры нахождения пересечения множеств, заданных перечислением элементов.

3.Примеры нахождения пересечения множеств, заданных характеристическим свойством элементов.

Краткое изложение теоретических вопросов.

Из элементов двух и более множеств можно образовывать новые множества. Пусть даны два множества: А = {2, 4, 6, 8} и В = {5, 6, 7, 8, 9}. Образуем множество С, в которое включим общие элементы множеств A и B, т.е. C = {6, 8}. Так полученное множество C называют пересечением множеств A и B.

Определение. **Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B.**

Пересечение множеств A и B обозначают A ∩ B. Таким образом, по определению, A ∩ B = {x|x ∈ A и x ∈ B).

Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то пересечением данных множеств является заштрихованная область (рис. 7).

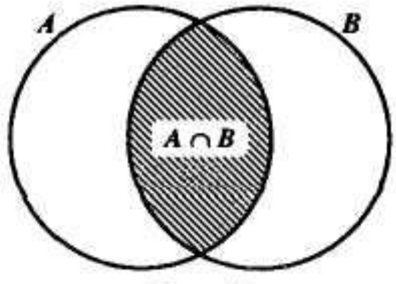


Рис. 7

В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: A ∩ B = Ø.

Выясним, как находить пересечение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти A ∩ B, достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B, т.е. их общие элементы.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов?

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества A ∩ B составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества A - четных натуральных чисел и множества B - двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества A - «быть четным натуральным числом», а характеристическое свойство элементов множества B - «быть двузначным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четными натуральными и двузначными числами». Таким образом, множество A ∩ B состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, 24 ∈ A ∩ B, поскольку число 24 четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят пересечение множества A и его подмножества B. Легко видеть, что тогда A ∩ B - B и, следовательно, характеристическое свойство элементов множества A ∩ B будет таким, как и свойство элементов множества B.

В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто, и пишут: A∩B=ø.

Найдём пересечение множеств A и B, если они заданы перечислением своих элементов:

а) A={2,4,6,8}, B={1,3,4,6,9}.

A∩B={4, 6}

б) A={2,4,6,8}, B={2,8}.

A∩B={2,8}=B

Найдём пересечение множеств A и B, заданных с помощью характеристического свойства элементов:

Практическое занятие- «Пересечение множеств».

Задания для самостоятельного выполнения: п.4, упр.7,8,9.

Тема 1.3.2.Объединение множеств.

Основные понятия и термины по теме:

объединение множеств А и В; примеры нахождения объединения множеств, заданных перечислением их элементов и заданием характеристического свойства элементов; символическое обозначение объединения множеств и его изображение при помощи кругов Эйлера.

План изучения темы:

1.Определение объединения множеств. Изображение при помощи кругов Эйлера.

2.Примеры нахождения объединения множеств, заданных перечислением элементов.

3.Примеры нахождения объединения множеств, заданных характеристическим свойством элементов.

Краткое изложение теоретических вопросов.

Пусть даны два множества: А = {2,4, 6, 8} и В = {5, 6, 7, 8, 9}. Образуем множество D, в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т.е. множеству А или множеству В. D = {2, 4, 6, 8, 5, 7, 9}. Так полученное множество D называют объединением множеств А я В.

Определение. **Объединением множеств А и В называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.**

Объединение множеств А и В обозначают $A \cup B$. Таким образом, по определению, $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$.

Если изобразить множества А и В при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 8).

Выясним, как находить объединение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств А и В перечислены, то, чтобы найти $A \cup B$,

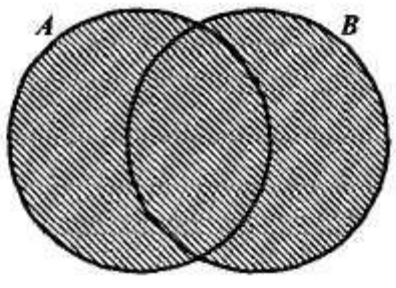


Рис. 8

достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами их элементов? Из определения объединения следует, что характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств элементов множеств А и В с помощью союза «или». Найдем, например, объединение множества А - четных натуральных чисел и множества В - двузначных чисел. Так как свойство элементов множества А - «быть четным натуральным числом», а свойство элементов множества В - «быть двузначным числом», то в объединение данных множеств войдут числа, характеристическое свойство которых - «быть четным натуральным или двузначным числом». Такие числа образуют бесконечное множество, но сформулированное характеристическое свойство позволяет однозначно определять, содержится тот или иной элемент в объединении множеств А и В или не содержится. Например, в $A \cup B$ есть число 8, поскольку оно четное; есть число 36 - оно четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят объединение множества А и его подмножества В. Легко видеть, что тогда $A \cup B = A$ и, следовательно, характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ будет таким, как и свойство элементов множества А

Найдём объединение множеств А и В, если они заданы перечислением своих элементов:

а) A={2,4,6,8}, B={1,3,4,6,9}.

AUB={2, 4, 6, 8, 1, 3, 9}

б) A={2,4,6,8}, B={2,8}.

AUB={2, 4, 6,8}=A

Найдём объединение множеств А и В, заданных с помощью характеристического свойства элементов:

А- множество чётных натуральных чисел,

В- множество двузначных чисел.

A∩B- множество чётных двузначных чисел.

Практическое занятие- «Пересечение множеств».

Задания для самостоятельного выполнения: п.4, упр.7,8,9.

Тема 1.4. Свойства пересечения и объединения множеств.

Основные понятия и термины по теме:

Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность пересечения и объединения множеств.

План изучения темы:

1. Изучение свойств пересечения и объединения множеств.
2. Доказательство свойств ассоциативности и дистрибутивности для трёх попарно пересекающихся множеств с помощью кругов Эйлера.
3. Определение порядка выполнения операций пересечения и объединения в выражениях без скобок.

Из школьного курса математики известно, что операция, при помощи которой находят сумму чисел, называется сложением. Над числами выполняют и другие операции, например, умножение, вычитание, деление; при этом результат умножения чисел называют произведением, деления - частным, т.е. для операций над числами и результатов этих операций существуют разные термины. Для рассмотренных операций над множествами ситуация иная: операции, при помощи которых находят пересечение и объединение множеств, называются соответственно пересечением и объединением.

Из школьного курса математики нам также известно, что операции над числами обладают рядом свойств. Например, сложение действительных чисел обладает переместительным и сочетательным свойствами: для любых действительных чисел а и Ь справедливо равенство $a + b = b + a$, а для любых чисел a, b и c – равенство

$(a + b)+ c = a + (b+ c)$.

Аналогичными свойствами обладает умножение действительных чисел. Кроме того, для сложения и умножения выполняется распределительное свойство: для любых действительных чисел a, b и c справедливо равенство: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Выясним, обладают ли «похожими» свойствами пересечение и объединение множеств.

Если обратиться к определениям пересечения и объединения множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами. Например, выполняя объединение, можно к элементам одного множества присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот: к элементам второго множества присоединить элементы первого. (При этом надо только помнить, что в новом множестве не должно быть повторяющихся элементов.) Аналогичная ситуация и в случае, когда выполняется пересечение множеств. Это означает, что пересечение и объединение множеств обладают переместительным, или, как говорят в математике, коммутативным свойством: для любых множеств А и В выполняются равенства: А ∩ В = В ∩ А и А ∪ В = В ∪ А.

Пересечение и объединение множеств обладают также сочетательным, или ассоциативным, свойством: для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

(А ∩ В) ∩ С = А ∩ (В ∩ С и (А ∪ В) ∪ С = А ∪ (В ∪ С).

Заметим, что назначение скобок в этих записях то же, что и в записях операций над числами.

Свойство ассоциативности для пересечения и объединения множеств не столь очевидно, как свойство коммутативности, и поэтому нуждается в доказательстве. Но прежде можно эти свойства проиллюстрировать при помощи кругов Эйлера. Рассмотрим, например, ассоциативное свойство пересечения множеств. Изобразим множества А, В и С в виде трех попарно пересекающихся кругов (рис. 9).

В выражении (А ∩ В) ∩ С скобки определяют следующий порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств А и В - оно показано на рисунке 9а вертикальной штриховкой, а затем находят пересечение полученного множества и множества С. Если выделить множество С горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, будет изображать множество (А ∩ В) ∩ С.

Представим теперь наглядно множество А ∩ (В ∩ С). В соответствии с указанным порядком действий сначала

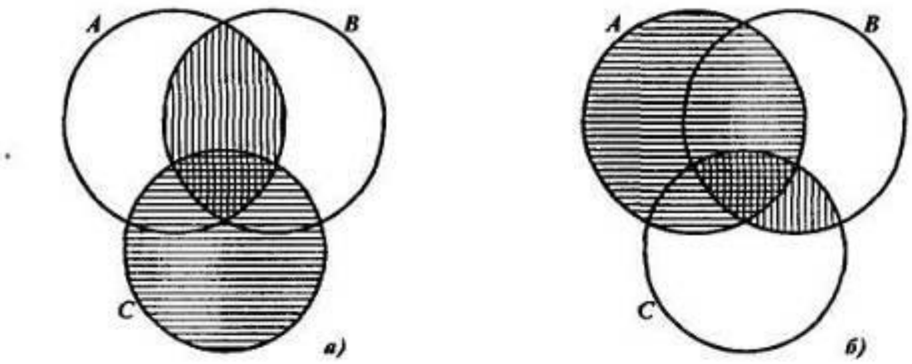


Рис. 9

надо найти пересечение множеств В и С - на рисунке 96 оно показано вертикальной штриховкой, а затем выполнить пересечение множества А с полученным множеством. Если отметить множество А горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество А ∩ (В ∩ С).

Видим, что области, представляющие на рисунке 9 множества (А ∩ В) ∩ С и А ∩ (В ∩ С), одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств.

Аналогично можно проиллюстрировать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

В чем важность ассоциативного свойства пересечения и объединения множеств? Во-первых, можно находить пересечение и объединение трех множеств, зная, как это делать для двух. Во-вторых, на основании этого свойства в выражениях А ∩ (В ∩ С), (А ∩ В) ∩ С, А ∪ (В ∪ С), (А ∪ В) ∪ С можно опускать скобки и писать А ∩ В ∩ С или А ∪ В ∪ С, что облегчает запись.

Рассмотрим строгое доказательство свойства ассоциативности одной из операций над множествами, например объединения, т.е. докажем, что для любых множеств А,В и С справедливо равенство (А ∪ В) ∪ С = А ∪ (В ∪ С).

Чтобы доказать равенство двух множеств, надо убедиться в том, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится в множестве $A \cup (B \cup C)$, и наоборот.

1. Пусть x - любой элемент множества $(A \cup B) \cup C$. Тогда, по определению объединения, $x \in A \cup B$ или $x \in C$.

Если $x \in A \cup B$, то, по определению объединения, $x \in A$ или $x \in B$. В том случае, когда $x \in A$, то, также по определению объединения, $x \in A \cup (B \cup C)$.

Если $x \in B$, то имеем, что $x \in B \cup C$, а значит, $x \in A \cup (B \cup C)$. Случай, когда $x \in A$ и $x \in B$, сводится к рассмотренным. Таким образом, из того, что $x \in A \cup B$, следует, что $x \in A \cup (B \cup C)$.

Если $x \in C$, то, по определению объединения, $x \in B \cup C$, и следовательно, $x \in A \cup (B \cup C)$.

Случай, когда $x \in A \cup B$ и $x \in C$, сводится к рассмотренным выше.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится и в множестве $A \cup (B \cup C)$, т.е. $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.

2. Пусть у - любой элемент множества $A \cup (B \cup C)$. Тогда, по определению объединения, $y \in A$ или $y \in B \cap C$.

Если $y \in A$, то, по определению объединения, $y \in A \cup B$ и, следовательно, $y \in A$ и $\cup (B \cup C)$.

Если $y \in B \cup C$, то $y \in B$ или $y \in C$. В том случае, когда $y \in B$, то $y \in A \cup B$ и, значит, $y \in (A \cup B)$ и С. Когда же $y \in C$, то $y \in (A \cup B) \cup C$. Случай, когда $y \in B$ и $y \in C$, сводится к уже рассмотренным.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $A \cup (B \cup C)$ содержится в множестве $(A \cup B) \cup C$, т.е. $A \cup (B \cup C) \subset (A \subset B) \subset C$.

Согласно определению равных множеств заключаем, что $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и ассоциативное свойство пересечения множеств.

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных, или дистрибутивных, свойствах этих операций. Таких свойств два:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств, т.е. для любых множеств А, В к С выполняется равенство

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняется равенство

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение. В связи со сказанным запись дистрибутивного свойства пересечения относительно объединения можно упростить, опустив скобки в правой части равенства.

Убедиться в справедливости сформулированных свойств можно путем доказательства, которое аналогично доказательству свойства ассоциативности объединения.

Проиллюстрировать свойства дистрибутивности можно, используя круги Эйлера.

Если провести аналогию с действиями над числами, то можно увидеть, что дистрибутивное свойство пересечения относительно объединения сопоставимо с распределительным свойством умножения относительно сложения, при условии, что в качестве операции, аналогичной пересечению, рассматривать умножение, а для объединения - сложение.

Но для дистрибутивного свойства объединения множеств относительно пересечения аналогичного свойства над числами нет.

Действительно, наличие такого свойства означало бы, что для всех чисел выполняется равенство $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$, что невозможно. Подмеченное отличие говорит о том, что наряду с тем, что пересечение и объединение множеств обладают рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел, операции над множествами обладают свойствами, которых нет у операций над числами.

Завершая рассмотрение свойств пересечения и объединения множеств, отметим еще следующее.

Понятие пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств:

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \mid x \in A_1$ и $x \in A_2$ и... и $x \in A_n\}$,

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x \mid x \in A_1$ или $x \in A_2$ или ... или $x \in A_n\}$,

Аналогично можно поступить и по отношению к рассмотренным свойствам данных операций.

Практическое занятие- «Понятие множества. Пересечение и объединение множеств. Свойства пересечения и объединения множеств».

Задания для самостоятельного выполнения: п.6, упр.3,5,7,8.

Тема 1.6. Разность множеств. Дополнение подмножества.

Основные понятия и термины по теме:

Разность множеств, дополнение подмножества, свойства разности множеств.

План изучения темы:

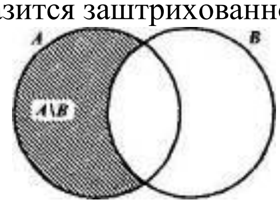
1. Определение разности множеств, обозначение и изображение при помощи кругов Эйлера;
2. Определение дополнения подмножества, обозначение и изображение при помощи кругов Эйлера;
3. Свойства разности множеств.

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют разностью и определяют следующим образом.

Определение. **Разностью множеств А и В называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.**

Разность множеств А и В обозначают А \ В. Тогда, по определению, имеем: $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Если представить множества А и В при помощи кругов Эйлера, то разность А\В изобразится заштрихованной областью (рис. 10).



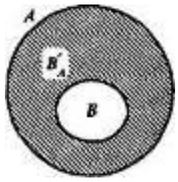


Рис. 10 Рис. 11

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств А\В называют **дополнением множества В до множества А**, и обозначают символом B'_A, а наглядно изображают так, как представлено на рисунке 11.

Определение. **Пусть В с А. Дополнением множества В до множества А называется множество, содержащее те и только те элементы множества А, которые не принадлежат множеству В.**

Как уже было сказано, в случае когда $B \subset A$, $A \setminus B = B'_A$.

Из определения следует, что $B'_A = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Выясним, как находить дополнение подмножества на конкретных примерах.

Если элементы множеств А и В перечислены и $B \subset A$, то, чтобы найти дополнение множества В до множества А, достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству А и не принадлежащие множеству В. Так, если А = {1, 2, 3, 4, 5}, а В = {2,4},то B'_A = {1,3,5}.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств А и В и известно, что $B \subset A$, то множество B'_A задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого «$x \in A$ и $x \notin B$». Так, если А - множество четных чисел, а В - множество чисел, кратных 4, то B'_A - это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например, $22 \in B'_A$, т.к. $22 \in A$ (т.е. оно четное) и $22 \notin B$ (т.е. оно не кратно 4).

Вычитание - это третья операция над множествами, с которыми мы уже познакомились. Нам известно, что пересечение множеств более сильная операция, чем объединение. А как быть с вычитанием? Например, каков порядок выполнения действий в выражении $A \backslash B \cap C$? Условились считать, что пересечение - более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \backslash B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств В и С, а затем полученное множество вычитают из множества А.

Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении $A \backslash B \cup C$ надо сначала выполнить вычитание (из А вычесть В), а затем полученное множество объединить с множеством С.

Вычитание множеств обладает рядом свойств. В частности, можно доказать, что для любых множеств А, В и С справедливы следующие равенства:

1) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$;

2) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$;

3) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$;

4) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

5) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Задания для самостоятельного выполнения: п.7, упр.3,5,7,8,9.

Практическое занятие – «Разность множеств. Дополнение подмножества».

Тема 1.7. Понятие разбиения множества на классы.

Основные понятия и термины по теме:

Понятие классификации множеств, разбиение множества на классы с помощью одного или двух свойств.

План изучения темы:

1. Определение классификации множества.
2. Примеры разбиения множества на классы.

Понятия множества и операций над множествами позволяют уточнить наше представление о классификации - действии распределения объектов по классам.

Классификацию мы выполняем достаточно часто. Так, натуральные числа представляем как два класса - четные и нечетные. Углы на плоскости разбиваем на три класса: прямые, острые и тупые.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1, X_2, ..., X_n$, если:

1) подмножества $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно не пересекаются;

2) объединение подмножеств $X_1, X_2, ..., X_n$ совпадает с множеством X.

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной. Например, если из множества X треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников, то разбиения мы не получим, поскольку подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (все равносторонние треугольники являются равнобедренными). В данном случае не выполнено первое условие разбиения множества на классы.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять мри помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают различными свойствами. Положим, что нас интересуют числа, обладающие свойством «быть кратным 3». Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогдапро остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т.е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел (рис. 12). Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то имеем разбиение этого множества на два класса.

Рис. 12

Вообще, если на множестве X задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый- это класс объектов, обладающих этим свойством, а второй- дополнение первого класса до множества X. Во втором классе содержатся такие объекты множества X, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют **дихотомической**.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для элементов множества заданы два свойства. Например, какие свойства натуральных чисел, как «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества N натуральных чисел можно выделить дна подмножества: А - подмножество чисел, кратных 3, и В - подмножество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис. 13).

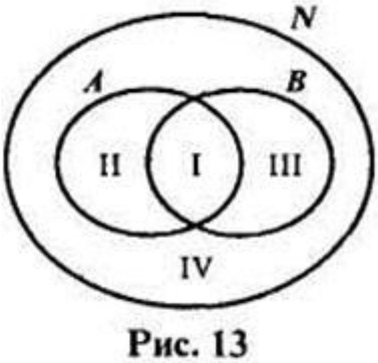


Рис. 13

Проанализируем получившийся рисунок. Конечно, разбиения множества натуральных чисел на подмножества А и В не произошло. Но круг, изображающий множество N, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей - на рисунке они пронумерованы. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N. Подмножество I состоит из чисел, кратных 3 и 5; подмножество II - из чисел, кратных 3 и не кратных 5; подмножество III -из чисел, кратных 5 и не кратных 3; подмножество IV- из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех подмножеств есть множество N.

Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества N натуральных чисел на четыре класса.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, при помощи таких двух свойств «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (рис. 14):

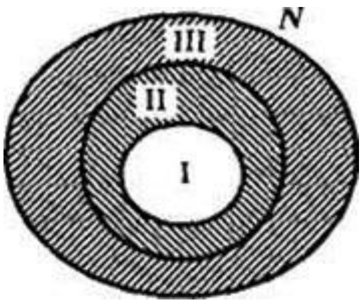


Рис. 14

I - класс чисел, кратных 6; II - класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III - класс чисел, не кратных 3.

Практическое занятие «Разбиение множества на классы»

Задания для самостоятельной работы – п. 8, упр. 4, 6, 8, 10, 12.

Тема 1.8. Декартово произведение множеств.

Основные понятия и термины по теме:

Упорядоченная пара, первая и вторая компоненты пары, декартово произведение множеств, способы задания декартова произведения, кортеж, длина кортежа.

План изучения темы:

1. Понятиеупорядоченной пары, первой и второй компоненты пары;
2. Определение декартова произведения множеств;
3. Свойства дистрибутивности операции декартова произведения относительно объединения и вычитания;
4. Наглядное представление декартова произведения множеств;
5. Понятие кортежа, длины кортежа;
6. Определение декартова произведения n множеств.

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В рассмотренном примере мы имели дело с упорядоченными парами.

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: (a; b). Элемент a называют ***первой координатой (компонентой) пары***, а элемент b - ***второй координатой (компонентой) пары.***

Пары (a; b) и (c; d) равны в том и только в том случае, когда a =c и b = d.

В упорядоченной паре (a; b) может быть, что a = b. Так, запись чисел 33 и 55 можно рассматривать как упорядоченные пары (3; 3) и (5; 5).

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, 4 = {1, 2, 3}, B = {3, 5}. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству A, а вторая- множеству B. Если мы перечислим все такие пары, то получим множество:

{(1;3),(1;5),(2;5),(3;3),(3;5)}.

Видим, что имея два множества А и В, мы получили новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это множество называют декартовым произведением множеств Аи В.

Определение. **Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая компонента принадлежит множеству В.**

Декартово произведение множеств А и В обозначают Ах В. Используя это обозначение, определение декартова произведения можно записать так:

А х В= {(x;y) |x ∈ А и у ∈ В}.

З а д а ч а 1. Найдите декартово произведение множеств А и В, если:

а)А = {m;p},B={e,f,k};

б)А=В={3,5}.

Решение. а) Действуем согласно определению- образуем все пары, первая компонента которых выбирается из А, а вторая - из В:

А х В= {(m; e), (m; f), (m; k), (р; е), (p;f), (р; к)}.

б) Декартово произведение равных множеств находят, образуя всевозможные пары из элементов данного множества:

А х А={(3;3), (3;5), (5;3), (5;5)}

Операцию нахождения декартова произведения множеств называют декартовым умножением. Выясним, какими свойствами обладает эта операция. Так как декартовы произведения А х В и В х А состоят из различных элементов, то декартово умножение множеств А и В свойством коммутативности не обладает. Можно доказать, что для декартова умножения не выполняется и свойство ассоциативности. Но декартово произведение дистрибутивно относительно объединения и вычитания множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

(А ∪ В) х С = (А х С) ∪ (В х С),

(А \ В) х С = (А х В) \ (В х С).

З а д а ч а 2. Проверьте справедливость свойства дистрибутивности декартова умножения относительно объединения, если:

А = {3; 4; 5}, В ={5; 7}, С ={7; 8}.

Решение. Найдем объединение множеств А и В: А ∪ В = {3,4,5,7}. Далее перечислим элементы множества (А ∪ В) х С, используя определение декартова произведения: (А ∪ В) х С = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)}.

Чтобы найти элементы множества (А х С) ∪ (В х С), перечислим сначала элементы множеств А х С и В х С:

А х С = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8)}

В х С={(5;7),(5;8),(7;7),(7;8)}.

Найдем объединение полученных декартовых произведений: (А х С) ∪ (В х С) = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)}.

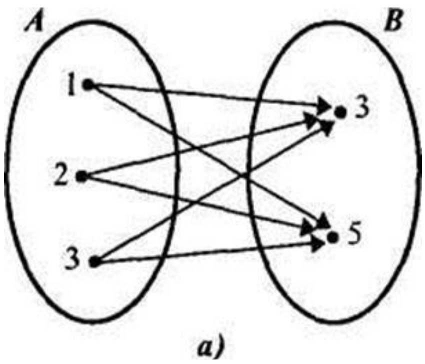
Видим, что множества (А ∪ В) х С и (А х С) ∪ (В х С) состоят из одних и тех же элементов, следовательно, для данных множеств А, В и С справедливо равенство (А ∪ В) х С = = (А х С) ∪ (В х С).

Выясним теперь, как можно наглядно представлять декартово произведение множеств.

Если множества А и В конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств А = {1, 2, 3} и В = {3, 5} можно представить так, как показано на рисунке 17(а, б).

А \ В	3	5

1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)



б) Рис. 17

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Элементы множества А изображаются на оси Ох, а элементы множества В - на оси Оу.

Такой способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

Задача 3. Изобразить на координатной плоскости декартово произведение Ах В, если:

а) А = {1,2,3},В = [3,5];

б) А = [1,3], В = [3,5];

в) А = **R**, В = [3,5];

г) А = **R**, В = **R**.

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Например, запись числа 367- это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» - это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют кортежами и различают по длине. Длина кортежа - это число элементов, из которых он состоит. Например, (3; 6; 7) - это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) - это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще и множеств.

Определение. **Декартовым произведением множеств A_1, A_2,..., A_n называется множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая - множеству A_2,..., n-я - множеству An.**

Декартово произведение множеств A_1, A_2,..., A_nобозначают так: A_1 x A_2 x... x A_n.

З а д а ч а 4. Даны множества: A_1 = {2, b), A_2 = {3, 4, 5}, A_3 = {6,7}. Найти A_1 x A_2 x A_3.

Ре ш е н и е. Элементами множества A_1x A_2x A_3 будут кортежи длины 3 такие, что первая их компонента принадлежит множеству А1, вторая - множеству A_2, третья - множеству A_3.

A_1x A_2x A_3 = {(2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7),

(2, 5, 6), (2, 5,7), (3,3,6), (3,3, 7),

(3,4, 6), (3,4,7), (3,5,6), (3,5,7)}.

Практическая работа «Декартово произведение множеств».

Задания для самостоятельной работы – п. 10, упр. 6, 8, 9, 10.

Тема 1.9. Число элементов в объединении и разности конечных множеств.

Основные понятия и термины по теме:

Обозначение числа элементов конечного множества, формулы для вычисления числа элементов объединения непересекающихся и пересекающихся множеств, разности двух множеств.

План изучения темы:

1. Обозначение числа элементов конечного множества;
2. Формула для вычисления числа элементов объединения непересекающихся множеств;
3. Формула для вычисления разности двух множеств;
4. Формула для вычисления числа элементов объединения пересекающихся множеств.
5. Решение задач на нахождение числа элементов в объединении и разности конечных множеств.

Нам известно, как находят объединение двух конечных непересекающихся множеств. Например, если А = {x, y, z}, а В = {к, l , m, p), то А $\cup$ В = {x, y, z, к, I, m , p}. Чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов в полученном множестве?» - достаточно пересчитать их.

А как определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Условимся предложение «Множество А содержит а элементов» записывать в таком виде: n (A) = а. Например, если А = {x, y, z, } то утверждение «Множество А содержит три элемента» можно записать так: n (A) = 3.

Можно доказать, что если в множестве А содержится а элементов, а в множестве В – b элементов и множества А и В не пересекаются, то в объединении множеств А и В содержится а + Ъ элементов, т.е.

n (A $\cup$ B) = n (A) + n (B) = a + b (1).

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств, его можно обобщить на случай t попарно непересекающихся множеств, т.е. если множества A_1, A_2, …, A_t, попарно не пересекаются, то n($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup$ A) = n (A_1) + n (A_2) + ... + n ($A_{t,}$).

Пусть, например, А = {x, y, г }, В = {к, I, т, p }, С = {q, s}. Найдем число элементов в объединении данных множеств.

Пересчитав элементы данных множеств, получаем, что n (A) =3, n (B) = 4, n(C) = 2. Видим, что А $\cap$ В = 0, А $\cap$ С = 0, В $\cap$ С = Ø, т.е. данные множества попарно не пересекаются. Тогда, согласно правилу нахождения числа элементов в объединении конечных множеств, получаем:

n (A $\cup$ B $\cup$ C) = n (A) + n (B) + n (C) = 3 + 4 + 2 = 9.

Таким образом, в объединении заданных трех множеств содержится 9 элементов.

Нетрудно убедиться в том, что если В $\subseteq$ А, то n (B'_A) = n (A) – n (B), т.е. число элементов дополнения подмножества В до данного конечного множества А равно разности численностей этих множеств.

Пусть, например, А = {x, y, z, p, t}, а В = {x, p, t}.Найдем число элементов в дополнении подмножества В до множества А.

Пересчитав элементы множеств А и В, получаем, что n (A) = 5, n (B) = 3. Тогда n (B'_A) = n (A) - n (B) = 5-3 = 2. Таким образом, в дополнении множества В до множества А содержится два элемента.

Формула (1) позволяет находить число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств. А если множества А и В имеют общие элементы, то как найти число элементов в их объединении?

Пусть, например, $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{x, z, p, s, к\}$. Тогда $A \cup B = \{x, y, z, p, s, к\}$, т.е. если $n(A) = 3$, а $n(B) = 5$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то $n(A \cup B) = 6$. Нетрудно видеть, что в данном случае $n(A \cap B) = 2$ и, значит, общие элементы множеств А и В и объединении этих множеств записаны только один раз.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конечных множеств может быть представлено в виде формулы:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (2).

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объединении двух и более множеств можно использовать для решения текстовых задач следующего вида.

З а д а ч а 1. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 - немецкий язык, а 15- английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Р е ш е н и е. Пусть А- множество студентов курса, изучающих английский язык, В - множество студентов курса, изучающих немецкий язык. По условию задачи: $n(A) = 32$, $n(B) = 21$, $n(A \cap B) = 15$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

1) Найдем число элементов в объединении данных множеств А и В. Для этого воспользуемся формулой (2):

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 32 + 21 - 15 = 38$.

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: 40 - 38 = 2.

2 способ.

I) Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств (рис. 23).

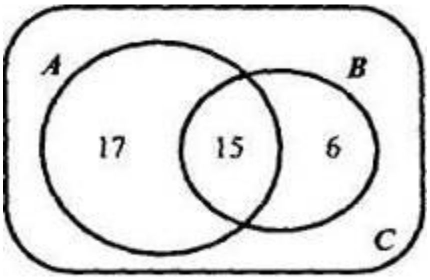


Рис .23

$n(C)=40$

Так как в пересечении множеств А и В содержится 15 элементов, то студентов, изучающих только английский язык, будет 17 (32- 15 = 17), а студентов, изучающих только немецкий, - 6 (21 - 15 = 6). Тогда $n(A \cup B) = 17 + 15 + 6 = 38$, и, следовательно, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки, будет 40 - 38 = 2.

Задания для самостоятельного решения – п. 10, упр. 3,6, 9, 10.

Тема 1.10. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.

Основные понятия и термины по теме:

Формула для вычисления числа элементов в декартовом произведении конечныхмножеств, дерево возможных вариантов.

План изучения темы:

1. Формула для вычисления числа элементов в декартовом произведении конечных множеств;

2. Решение задач на нахождение числа элементов в декартовом произведении конечных множеств.

Нам известно, как находят декартово произведение конечных множеств. Например, если A = {x, y, z }, B = { m, p }, то A x B= {(x, m), (x, p), (y, m), (y, p), (z, m), (z, p)}. Чтобы ответить на вопрос «Сколько элементов в полученном множестве?», - достаточно пересчитать их. А как определить число элементов в декартовом произведении множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B - b элементов, то в декартовом произведении множеств A и B содержится a - b элементов, т.е.

$n(A \times B)= n(A) \cdot n(B)=a \cdot b$

Правило распространяется на случай t множеств, т.е. $n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_t)$.

Например, если в множестве A содержится 3 элемента, в множестве B - 4 элемента, в множестве C- 5 элементов, то в их декартовом произведении будет содержаться $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ упорядоченных наборов из трех элементов.

Полученные формулы можно использовать при решении задач.

З а д а ч а 1. У Маши 3 различных юбки и 4 различных кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?

Р е ш е н и е. Пусть A - множество юбок у Маши, B - множество кофт у нее. Тогда, по условию задачи, n (A) = 3, n (B) = 4. Требуется найти число возможных пар, образованных из элементов множеств A и B, т.е. n (A x B). Но согласно правилу n (A x B) = n (A) · n (B) = 3·4 = 12. Таким образом, из 3 юбок и 4 кофт Маша может составить 12 различных комплектов.

З а д а ч а 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5,4 и 7?

Р е ш е н и е. Запись любого двузначного числа состоит из двух цифр и представляет собой упорядоченную пару. В данном случае эти пары образуются из элементов множества A = {5, 4, 7}. В задаче требуется узнать число таких пар, т.е. число элементов в декартовом произведении A x A. Согласно правилу n (A x A) = n (A) · n (A) = 3·3 = 9. Значит, двузначных чисел, записанных с помощью цифр 5, 4 и 7, будет 9.

Часто при решении задач, аналогичных рассмотренным выше, требуется не только ответить на вопрос о том, сколько существует возможных вариантов ее решения, но и осуществить перебор этих вариантов. Например, в задаче 2 можно предложить записать все двузначные числа, используя цифры 5,4 и 7.

Существует единый подход к осуществлению такого перебора - строится схема, называемая деревом возможных вариантов. Так, для задачи 2 она будет иметь вид (рис. 25):

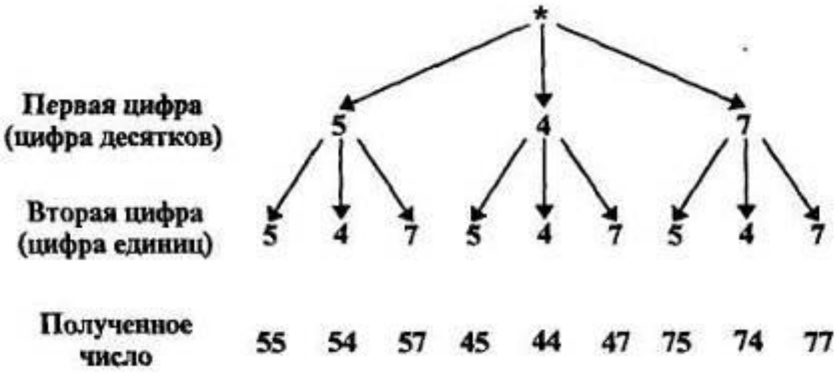


Рис. 25

Эта схема действительно похожа на дерево, правда, растет оно вниз и у него нет ствола. То, что дерево растет как бы «вверх ногами», удобно при построении схем такого вида. Знак * изображает корень дерева, ветвями которого являются различные варианты решения задачи. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать цифру десятков - для этого есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому из * проведены три отрезка и на их концах поставлены цифры 5, 4 и 7. Затем надо выбрать цифру единиц, а для этого также есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому от цифр 5, 4 и 7 проведено по три отрезка, на концах которых опять стоят цифры 5, 4 или 7. Чтобы прочитать полученные варианты, надо пройти по всем ветвям построенного дерева сверху вниз.

Задания для самостоятельного решения – п. 11, упр. 3, 4.

Практическое занятие – «Декартово произведение множеств. Число элементов в объединении, разности и декартовом произведении конечных множеств».

Контрольная работа.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

Тема 2.1. Математические понятия. Объем и содержание понятия. Отношения между понятиями.

Основные понятия и термины по теме:

арифметические, алгебраические, геометрические понятия; понятия, связанные с величинами и их измерением;объем и содержание понятия; отношения между понятиями (рода и вида, целого и части).

План изучения темы:

1. Четыре группы математических понятий, изучаемых в начальной школе;
2. Объём и содержание понятия;
3. Отношения между понятиями.

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп. В первую включаются понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, сложение, слагаемое, больше и др. Во вторую входят алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др. Третью составляют геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т.д. Четвертую группу образуют понятия, связанные с величинами и их измерением.

Как же изучить такое обилие самых разных понятий?

Прежде всего, надо иметь представление о понятии как логической категории и особенностях математических понятий.

В логике понятия рассматривают как форму мысли, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Составить понятие об объекте - это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов. Математические понятия обладают рядом особенностей. Главная заключается в том, что математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: цвет, массу, твердость и т.д. От всего этого отвлекаются, абстрагируются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят «геометрическая фигура».

Результатом абстрагирования являются и такие математические понятия, как «число» и «величина».

Вообще математические объекты существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

К сказанному можно добавить, что, изучая пространственные формы и количественные отношения материального мира, математика не только пользуется различными приемами абстрагирования, но и само абстрагирование выступает как многоступенчатый процесс. В математике рассматривают не только понятия, появившиеся при изучении реальных предметов, но и понятия, возникшие на основе первых. Например, общее понятие функции как соответствия является обобщением понятий конкретных функций, т.е. абстракцией от абстракций.

Чтобы овладеть общими подходами к изучению понятий в начальном курсе математики, учителю необходимы знания об объеме и содержании понятия, об отношениях между понятиями и о видах определений понятий.

2. Объем и содержание понятия. Отношения между понятиями

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие его свойства.

Среди свойств объекта различают существенные и несущественные. Свойство считают существенным для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать. Например, для квадрата существенными являются все свойства, названные выше. Несущественно для квадрата ABCD свойство «сторона AD горизонтальна». Если квадрат повернуть, то сторона AD окажется расположенной по-другому (рис. 26).

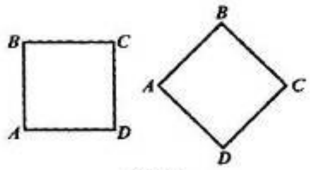


Рис. 26

Поэтому, чтобы понимать, что представляет собой данный математический объект, надо знать его существенные свойства.

Когда говорят о математическом понятии, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином (словом или группой слов). Так, говоря о квадрате, имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Считают, что множество всех квадратов составляет объем понятия «квадрат».

Вообще **объем понятия - это множество всех объектов, обозначаемых одним термином.**

Любое понятие имеет не только объем, но и содержание.

Содержание понятия- это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

Рассмотрим, например, понятие «прямоугольник».

Объем понятия - это множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства прямоугольников, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т.д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот. Так, например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а в содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник» («все стороны равны», «диагонали взаимно перпендикулярны» и др.).

Любое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязи с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь устанавливать эти связи.

Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объемами, т.е. множествами.

Условимся понятия обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c,..., z.

Пусть заданы два понятия a и b. Объемы их обозначим соответственно A и B.

Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие *a - видовое по отношению к понятию b*, а понятие *b - родовое по отношению к понятию a*.

Например, если a - «прямоугольник», b - «четырехугольник», то их объемы A и B находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$), поскольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «прямоугольник» - видовое по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» - родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если A = B, то говорят, что *понятия a и b тождественны.*

Например, тождественны понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник», так как их объемы совпадают.

Если множества A и B не связаны отношением включения, то говорят, что понятия a и b не находятся в отношении рода и вида и не тождественны. Например, не связаны такими отношениями понятия «треугольник» и «прямоугольник».

Рассмотрим подробнее отношение рода и вида между понятиями. Во-первых, понятия рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» - родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм».

В-третьих, видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

Так как объем понятия - множество, удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их при помощи кругов Эйлера.

Установим, например, отношения между следующими парами понятий a и Ь, если:

1) a - «прямоугольник», b - «ромб»;

2) a - «многоугольник», b - «параллелограмм»;

3) a - «прямая», b - «отрезок».

В случае 1) объемы понятий пересекаются, но не одно множество не является подмножеством другого (рис. 27).

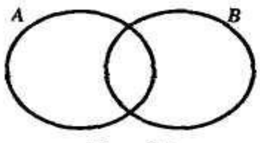


Рис. 27

Следовательно, можно утверждать, что данные понятия a и b не находятся в отношении рода и вида.

В случае 2) объемы данных понятии находятся в отношении включения, но не совпадают - всякий параллелограмм является многоугольником, но не наоборот (рис. 28). Следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» - видовое по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» - родовое по отношению к понятию «параллелограмм».

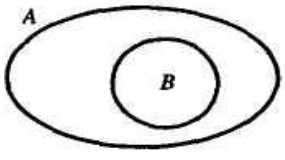


Рис. 28

В случае 3) объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком (рис. 29).

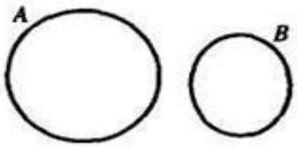


Рис. 29

Следовательно, данные понятия не находятся в отношении рода и вида.

О понятиях «прямая» и «отрезок» можно сказать, что они *находятся в отношении целого и части:* отрезок- часть прямой, а не ее вид. И если видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия, то часть не обязательно обладает всеми свойствами целого. Например, отрезок не обладает таким свойством прямой, как ее бесконечность

Тема 2.2. Определение понятий.

Основные понятия и термины по теме:

определение понятия, явные и неявные определения, виды определений (через род и видовое отличие, генетические, контекстуальные, остенсивные).

План изучения темы:

1. Определение понятия.
2. Явные и неявные определения.
3. Определения через род и видовое отличие.
4. Правила построения определения через род и видовое отличие.
5. Генетические определения.
6. Контекстуальные и остенсивные определения.

Появление в математике новых понятий, а значит, и новых терминов, обозначающих эти понятия, предполагает их определение.

Определением обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина (или обозначения) Как правило, делают

это на основе ранее введенных понятий. Например, прямоугольник можно определить так: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые». В этом определении есть две части- определяемое понятие (прямоугольник) и определяющее понятие (четырехугольник, у которого все углы прямые). Если обозначить через а первое понятие, а через b - второе, то данное определение можно представить в таком виде:

а есть (по определению) b.

Слова «есть (по определению)» обычно заменяют символом $\underset{опр}{\Leftrightarrow}$, и тогда определение выглядит так: а $\underset{опр}{\Leftrightarrow}$ b

Читают: «а равносильно b по определению». Можно прочитать эту запись еще и так: «а тогда и только тогда, когда b».

Определения, имеющие такую структуру, называются явными. Сформулировать их можно по-разному. В математике используют определения через род и видовое отличие, генетические, индуктивные и другие.

Примером определения через род и видовое отличие является определение прямоугольника, данное выше. В *генетических* определениях указывается способ образования определяемого объекта. Например, шар - это геометрическая фигура, получаемая в результате вращения полукруга вокруг диаметра. В *индуктивных* определениях указываются некоторые основные объекты теории и правила, позволяющие получать новые из уже имеющихся. Примером такого определения может служить определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом».

Но чаще всего в математике используются определения через род и видовое отличие. Рассмотрим подробнее структуру этих определений.

Обратимся опять к определению прямоугольника, вернее, к его второй части - определяющему понятию. В нем можно выделить:

1) понятие «четырехугольник», которое является родовым по отношению к понятию «прямоугольник»,

2) свойство «иметь все углы прямые», которое позволяет выделить из всевозможных четырехугольников один вид - прямоугольники; поэтому его называют видовым отличием.

Вообще видовое отличие- это свойства (одно или несколько), которые позволяют выделять определяемые объекты из объема родового понятия.

Итоги нашего анализа можно представить в виде схемы

(1)

Заметим, что в наглядном представлении структуры определения через род и видовое отличие мы допустили некоторые неточности. Во-первых, слова «родовое понятие» означают, что речь идет о родовом понятии по отношению к определяемому. Во-вторых, не совсем ясно, что означает знак «+», который, как известно, используется для обозначения сложения чисел. Смысл этого знака станет понятным немного позже, когда мы рассмотрим математический смысл союза «и». А пока познакомимся с еще одной возможностью наглядного представления определения через род и видовое отличие. Если определяемое понятие обозначить буквой а, определяющее буквой b, родовое понятие (по отношение к определяемому) -буквой *c,* а видовое отличие - буквой *P,* то определение через род и видовое отличие можно представить так:

$$\underbrace{\quad}_{a} \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \underbrace{c+P}_{b}$$

Почему видовое отличие обозначено заглавной буквой, мы узнаем несколько позже.

Нам известно, что любое понятие имеет объем. Если понятие *а* определено через род и видовое отличие (2), то о его объеме - множестве *А* - можно сказать, что в нем содержатся такие объекты, которые принадлежат множеству *С* (объему родового понятия *с)* и обладают свойством *Р:*

$A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}$.

Например, если дано определение: «Острым углом называется угол, который меньше прямого»,- то объем понятия «острый угол» - это подмножество множества всех углов плоскости, которые обладают свойством «быть меньше прямого».

Так как определение понятия через род и видовое отличие является по существу условным соглашением о введении нового термина для замены какой-либо совокупности известных терминов, то об определении нельзя сказать, верное оно или неверное; его не доказывают и не опровергают.

Но, формулируя определения, придерживаются ряда правил. Назовем основные.

1. Определение должно быть соразмерным. Это означает, что объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать. Это правило вытекает из того, что определяемое и определяющее понятия взаимозаменяемы.

Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Действительно, объем определяемого понятия - множество квадратов. Объем определяющего понятия- множество четырехугольников, все стороны которых равны, а это множество ромбов. Но не всякий ромб есть квадрат, т.е. объемы определяемого и определяющего понятия не совпадают, и, следовательно, данное определение несоразмерно.

2. В определении (или их системе) не должно быть порочного круга. Это означает, что нельзя определять понятие через само себя (в определяющем не должно содержаться определяемого термина) или определять его через другое, которое, в свою очередь, определять через него.

Например, содержат порочный круг определения: «Равные треугольники - это треугольники, которые равны», «Касательная к окружности - это прямая, которая касается окружности».

Так как в математике рассматривают не просто отдельные понятия, а их систему, то данное правило запрещает порочный круг и в системе определений. В соответствии с ним нельзя определять понятие *a,* выбрав в качестве родового понятия *c,* а понятие *c* - через понятие *a.*

Например, если определить окружность как границу круга, а круг как часть плоскости, ограниченную окружностью, то мы будем иметь порочный круг в определениях данных понятий.

3. Определение должно быть ясным. Это на первый взгляд очевидное правило, но означает оно многое. Прежде всего, требуется, чтобы значения терминов, входящих в определяющее понятие, были известны к моменту введения определения нового понятия.

Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

К условиям ясности определения относят также требования включать в видовое отличие лишь столько свойств, сколько необходимо и достаточно для выделения определяемых объектов из объема родового понятия.

Рассмотрим, например, такое определение прямоугольника: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны».

Нетрудно убедиться в том, что это определение соразмерное и в нем нет порочного круга. Но можно доказать, что свойство «в прямоугольнике противоположные стороны равны» вытекает из свойства «в прямоугольнике все углы прямые». В этом случае считают, что в данном определении прямоугольника второе свойство избыточное.

Таким образом, чтобы определение было ясным, желательно, чтобы оно не содержало избыточных свойств в определяющей части, т.е. таких свойств, которые могут быть выведены из других, включенных в это определение. Однако иногда для простоты изложения это правило нарушают.

Для обеспечения ясности определения важно также наличие понятия, родового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия делает определение несоразмерным. Неприемлемо, например, такое определение квадрата: «Квадрат - это когда все стороны равны».

К сказанному следует добавить, что, формулируя определение, надо стремиться в определяющем указывать не просто родовое по отношению к определяемому понятие, а ближайшее. Это часто позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

Например, если для определения квадрата в качестве родового выбрать понятие «четырехугольник», то тогда надо будет включать в видовое отличие два свойства: «иметь все прямые углы» и «иметь все равные стороны». В результате получим определение: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны».

Если же в качестве родового выбрать ближайшее для квадрата родовое понятие - прямоугольник, то получим более короткое определение квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

4. **Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие, соблюдая сформулированные выше правила, можно по-разному.** Так, квадрат можно определить как:

а) прямоугольник, у которого соседние стороны равны;

б) прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;

в) ромб, у которого есть прямой угол;

г) параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

Различные определения одного и того же понятия возможны потому, что из большого числа свойств, входящих в содержание понятия, в определение включаются только некоторые. И когда из возможных определений выбирают одно, исходят из того, какое из них проще и целесообразнее для дальнейшего построения теории.

Если же одному и тому же понятию даются, например, два разных определения, то необходимо доказывать их равносильность, т.е. убеждаться в том, что из свойств, включенных в одно определение, вытекают свойства, включенные в другое, и наоборот.

Завершая рассмотрение определений понятий через род и видовое отличие, назовем ту последовательность действий, которую мы должны соблюдать, если хотим воспроизвести определение знакомого понятия или построить определение нового:

1. Назвать определяемое понятие (термин).

2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.

3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т.е. сформулировать видовое отличие.

4. Проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

При изучении математики в начальных классах определения через и видовое отличие используют редко. Связано это как с особенностями курса, так и с возможностями детей. Но понятий в начальном курсе математики очень много - об этом мы говорили в самом начале параграфа. Как же их определяют?

Практическое занятие - «Математические понятия. Объём и содержание понятий. Определение понятий».

Задания для самостоятельной работы – п.2, упр. 5, 8, 9, 10.

Тема 2.3. Высказывания и высказывательные формы.

Основные понятия и термины по теме:

высказывание, значения истинности высказываний («истина», «ложь»), одноместная высказывательная форма (предикат), множество истинности высказывательной формы, логические связки, элементарное и составное математическое предложение.

План изучения темы:

1. Высказывание, значения истинности высказываний («истина», «ложь»);
2. Высказывательная форма (предикат), множество истинности высказывательной формы;
3. Логические связки, элементарное и составное математическое предложение.

Взаимосвязи между объектами и свойствами выражаются с помощью предложений. Предложения могут быть сформулированы при помощи слов и записаны при помощи математических символов:

«У квадрата все стороны равны»;

«5 < 7».

Каждое математическое предложение характеризуется содержанием и логическойструктурой. По структуре различают *элементарные* и *составные* предложения.

Элементарные: 1) «20 – четное число»; 2) «х > 8».

Составные: 1)" 20 четное *и делится на* 5 "; 2) «х ≥ 8»,

Составные предложения образуются из элементарных с помощью слов "и", "или", частицы "не". Эти слова называются *логическими связками.*

Пример : " 20 четное *и делится на* 5 "

Логическая структура: "А и В" , где А - "20 четное число", В -"20 делится на 5"

Среди предложений выделяют *высказывания* и *высказывательные формы.*

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Высказывания обычно обозначают большими латинскими буквами. Если высказывание А истинно, то записывают: А – «и» или присваивают А значение 1, если высказывание А ложно, то пишут А – «л» или А имеет значение 0. «Истина» и «ложь» называются значениями истинности высказываний. Например, предложение «Саратов расположен на берегу реки Волги» является высказыванием, причем истинным высказыванием. Предложение «Число 25 делится на 3» – ложное высказывание. Выражение «25 + 6» высказыванием не является, так как о нем нельзя сказать истинно оно или ложно. Не являются высказываниями предложения, содержащие переменную величину, например: «Число x больше числа 8».

Слова «неверно, что», «и», «или», «если … , то», «тогда и только тогда, когда» называются логическими связками. Высказывания делятся на *простые (элементарные)* и *составные* . Составные высказывания содержат логические связки и могут быть разбиты на простые высказывания. Например, высказывание «6 > 3» является простым, а высказывание «5 < 8 < 12» является составным, так как его можно разбить на два простых высказывания: «5 < 8» и «8 < 12».

Определение.*Высказывательной формой* или *предикатом* называется предложение с одной или несколькими переменными, обращающееся в высказывание, если вместо переменных подставить их значения.

По числу переменных, входящих в предикат, различают одноместные, двухместные и т. д. предикаты и обозначают: А(x), А(x , y) и т. д. Например, $x + 5 = 9$ – одноместный предикат, а предложение «Число x делится на число y » – двухместный.

П р и м е р 1. Выясните, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие предикатами: а) $452 < 237$; б) $5x - 6 = 4$; в) Сколько стоит эта книга?; г) Число кратно 7?

Р е ш е н и е.

а) Предложение $452 < 237$ является высказыванием, так как можно утверждать, что оно ложно.

б) Предложение $5x - 6 = 4$ является предикатом, так как это предложение содержит переменную x и при подстановке конкретного значения x превращается в высказывание. Если $x = 3$, то $5 \cdot 3 - 6 = 4$ – ложное высказывание, если $x = 2$, то $5 \cdot 2 - 6 = 4$ – истинное высказывание.

в) Предложение «Сколько стоит эта книга?» не является высказыванием, так как о вопросительных предложениях бессмысленно ставить вопрос об их истинности или ложности. Данное предложение не является и предикатом.

г) Несмотря на то, что в предложении «Число кратно 7» переменная не содержится в явном виде, ее наличие подразумевается, поэтому данное предложение является предикатом. Оно превращается в высказывание при подстановке в него конкретного числа.

Практическое занятие – «Высказывания и высказывательные формы».

Задания для самостоятельной работы:

1. Укажите среди следующих предложений высказывания:

а)Луна – спутник Земли;

б)Все учащиеся любят математику;

в)Принеси мне, пожалуйста, книгу;

г)Некоторые люди имеют голубые глаза;

д)Окружностью называется множество всех точек плоскости, расстояние которых от данной точки плоскости имеет заданную величину;

е)Вы были в театре?

2. Верно ли высказывание?

а)Два часа больше семи тысяч секунд;

б)в двух квадратных метрах содержится 200 сантиметров ;

в)пять гирь по 3 кг тяжелее 3 гирь по 5 кг ;

г)число 0 меньше любого натурального числа;

д)семью девять – сорок девять;

е)число 8 удовлетворяет равенству $x \cdot x - x = 56$.

3. Какие из следующих высказываний верны, а какие неверны:

а)У всех львов есть хвосты;

б)Некоторые люди дошли на лыжах до Северного полюса;

в)Ни в одном месяце нет 50 дней;

г)Все деревья растут в лесу;

д)Ни одно дерево не растет в лесу;

е)Некоторые деревья растут в лесу;

ж) Некоторые ученики нашего класса были на Луне.

Тема 2.4. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний и высказывательных форм

Основные понятия и термины по теме:

Конъюнкция и дизъюнкция высказываний и высказывательных форм, значения истинности конъюнкции и дизъюнкции высказываний,множество истинности высказывательных форм.

План изучения темы:

1. Определениеконъюнкции и дизъюнкции высказываний;

2. Понятие логической операции;
3. Определениеконъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм;
4. Нахождение множества истинности конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм.

Определение.Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А∧В, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

Обозначают А∧В (читают: «А и В»).

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой **таблицей истинности**.

А	В	А∧В
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 и на 9», которое, как было установлено раньше, состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т.е. является конъюнкцией.. Так как первое высказывание истинно, а второе ложно, то, согласно определению конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Определение. Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А∨В, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Высказывание образовано с помощью союза «или»: А∨В (читают А или В).

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 или на 9». Так как это предложение является дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, то, согласно определению дизъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет истинным.

В математике союз «или» используется как неразделительный.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называется **логической операцией.**

Определения конъюнкции и дизъюнкции можно обобщить на t составляющих их высказываний.

Конъюнкцией t высказываний называется предложение вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_t$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны все составляющие его высказывания

Дизъюнкцией t высказываний называется предложение вида $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_t$, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все составляющие его высказывания

1. **Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм**

В математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний, но и выполняют соответствующие **операции над высказывательными формами.**

Конъюнкциюодноместных высказывательных форм А(х) и В(х), заданных на множестве Х, обозначают А(х) ∧ В(х). С появлением этого предложения возникает вопрос, как найти его множество истинности, зная множества истинности высказывательных форм А(х) и В(х). Другими словами, при каких значениях х из области определения Х высказывательная форма А(х) ∧ В(х) обращается в истинное высказывание? Очевидно, что это возможно при тех и только тех значениях х, при которых обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$. Если обозначить TA – множество истинности предложения $A(x)$, TB – множество истинности предложения $B(x)$, а множество истинности их конъюнкции $T\,A{\wedge}B$, то, по всей видимости, $T\,A{\wedge}B = TA \cap TB$.

Докажем это равенство.

1. Пусть a – произвольный элемент множества X и известно, что $a \in T\,A{\wedge}B$. По определению множества истинности это означает, что высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание при $x = a$, т.е. высказывание $A(a) \wedge B(a)$ истинно. Так как данное высказывание конъюнкция, то получаем, что каждое из высказываний $A(a)$ и $B(a)$ также истинно. Это означает, что $a \in T\,A$ и $a \in TB$. Следовательно, по определению пересечения множеств, $a \in TA \cap TB$. Таким образом, мы показали, что $T\,A{\wedge}B \subset TA \cap TB$.

2. Докажем обратное утверждение. Пусть a – произвольный элемент множества X и известно, что $a \in TA \cap TB$. По определению пересечения множества это означает, что $a \in T\,A$ и $a \in TB$, откуда получаем, что $A(a)$ и $B(a)$ – истинные высказывания, поэтому конъюнкция высказываний $A(a) \wedge B(a)$ также будет истинна. А это означает, что элемент a принадлежит множеству истинности высказывательной формы $A(x) \wedge B(x)$, т.е.

$a \in T\,A{\wedge}B$. Таким образом, мы доказали, что $TA \cap TB \subset T\,A{\wedge}B$.

Из 1 и 2 в силу определения равных множеств вытекает справедливость равенства

$T\,A{\wedge}B = TA \cap TB$, что и требовалось доказать.

Заметим, что полученное правило справедливо и для высказывательных форм, содержащих более одной переменной.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x) \vee B(x)$, Это предложение будет обращаться в истинное высказывание при тех и только тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм, т.е.

$T\,A{\vee}B = TA \cup TB$. Доказательство этого равенства аналогично рассмотренному выше.

Приведем пример. Решим уравнение $(x - 2) \bullet (x + 5) = 0$. Известно, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Это означает, что данное уравнение равносильно дизъюнкции: $x - 2 = 0 \vee x + 5 = 0$ и поэтому множество его решений может быть найдено как объединение множеств решения первого и второго уравнений, т.е $\{2\}\cup\{-5\} =\{-5, 2\}$.

Заметим, что дизъюнкцию уравнений (неравенств) называют также совокупностью.

Рассматривая конъюнкцию и дизъюнкцию высказывательных форм, мы установили их тесную связь с пересечением и объединением множеств.

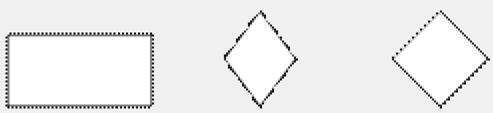
$A\cap B = \{x \backslash\ x \in A \wedge x \in B\}$, $A\cup B = \{x \backslash\ x \in A \vee x \in B\}$, причем каждое свойство представляет собой высказывательную форму.

1. **Решение задач на распознавание объектов**

С введением понятия конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм появились условия для рассмотрения вопросов, связанных с решением определенного вида задач, так называемых задач на распознавание объектов.

В задачах на распознавание объектов требуется ответить на вопрос: принадлежит тот или иной объект объему данного понятия или не принадлежит.

Пример 1. «Установите, какие из фигур являются квадратами, а какие нет».



Решают такие задачи, используя определение соответствующего понятия. При этом важно понимать, что если понятие а определено через родовое понятие с и видовое отличие P, то его объем A можно представить в таком виде: $A = \{x \backslash\ x \in C \text{ и } P(x)\}$ Эта запись показывает, что характеристическое свойство элементов, принадлежащих объему понятия а, представляет собой *конъюнкцию двух свойств:*

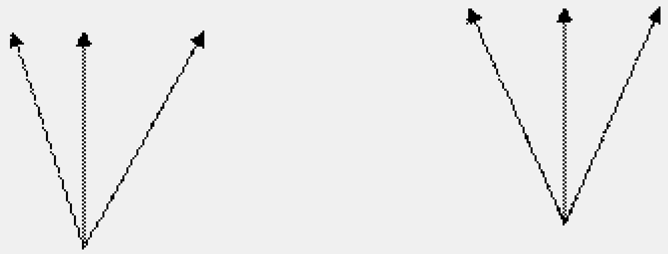
1) принадлежности объекта x объему C родового понятия ($x \in C$);

2) свойства $P(x)$.

Пример 2. «Выяснить, в каком случае луч BD является биссектрисой угла ABC».

Воспользуемся таким определением биссектрисы угла: «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий этот угол пополам». Из него следует, что для того, чтобы луч был биссектрисой угла, он должен обладать двумя свойствами: «выходить из вершины угла» и «делить этот угол пополам».

A D C A D C



B B

а) б)

Луч BD на рисунке а) не является биссектрисой угла ABC, поскольку он не делит данный угол пополам. Луч BD на рисунке б) является биссектрисой угла ABC, поскольку он делит данный угол пополам и выходит из вершины угла.

Если видовое отличие представляет собой конъюнкцию свойств, т.е. $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge Pn$, то распознавание проводится по следующему правилу: проверяют поочередно наличие у объекта каждого из свойств P_1, P_2, …, Pn; если окажется, что он не обладает каким-либо из этих свойств, то проверку прекращают и делают вывод о том, что объект не обладает свойством P; если же окажется, что все свойства P_1, P_2, …, Pn присущи данному объекту, то заключают, что объект обладает свойством P.

Если видовое отличие представляет собой дизъюнкцию свойств, т.е. $P = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee Pn$, то распознавание проводится по следующему правилу: проверка проводится до тех пор, пока не будет установлено, что хотя бы одно из свойств присуще данному объекту, на основании чего заключают, что объект обладает свойством P. Если окажется, что он не обладает ни одним из свойств P_1, P_2, …, Pn, то проверку прекращают и делают вывод о том, что объект не обладает свойством P.

Практическое занятие – «Конъюнкция и дизъюнкция высказываний и высказывательных форм».

Задания для самостоятельной работы: п. 2, упр. 4, 5; п. 3, упр. 4, 5.

Тема 2.5. Высказывания с кванторами.

Основные понятия и термины по теме:

квантор общности, квантор существования, логическая структура высказывания, контрпример.

План изучения темы:

1. Понятие квантора общности (слова «каждый», «все», «любой»), обозначение;
2. Понятие квантора существования (слова «некоторые», «хотя бы», «существует»), обозначение;
3. Логическая структура высказываний с кванторами;

4. Значение истинностивысказываний с кванторами.

Слова, превращающие высказывательную форму или предикат в высказывание, называются *кванторами* . Выражение «для всех x » («для любого x », «для каждого x ») называется *квантором общности* и обозначается $\forall x$. Выражение «существует такое x » («для некоторых x », «хотя бы для одного x », «найдется такое x ») называется *квантором существования* и обозначается $\exists x$.

Высказывание, полученное из предиката Р(x) при помощи квантора общности, записывается в виде ($\forall x \in$ X) Р(x) и читается: «Для любого (каждого, всякого) значения x из множества X имеет место Р(x)» или «Любой (каждый, всякий) элемент x из множества X обладает свойством Р». Например, если Р(x) – «Натуральное число x является целым числом», то высказывание с квантором общности будет выглядеть так: «Любое натуральное число x является целым числом».

Высказывание, полученное из предиката Р(x) при помощи квантора существования, записывается в виде ($\exists x \in$X) Р(x) и читается: «Для некоторого значения x из множества X имеет место Р(x)» или «Найдется элемент x из множества X, который обладает свойством Р», или «Существует элемент x в множестве X, для которого выполняется свойство Р». Например, если Р(x) – «Натуральное число x делится на 2», то высказывание с квантором существования будет выглядеть так: «Найдется натуральное число x , которое делится на 2».

Чтобы установить истинность утверждения с квантором общности, надо провести доказательство, чтобы установить его ложность – достаточно привести опровергающий его пример. Высказывание, содержащее квантор общности, может быть представлено в виде конъюнкции высказываний.

Высказывание с квантором существования истинно, если можно привести пример, то есть найти такое значение переменной, при котором предикат обращается в истинное высказывание. Ложность высказывания с квантором существования устанавливается путем доказательства. Высказывание, содержащее квантор существования, может быть представлено в виде дизъюнкции высказываний.

Для построения отрицаний с кванторами надо: 1) квантор общности заменить на квантор существования, а квантор существования – на квантор общности; 2) предикат заменить его отрицанием. Таким образом, справедливы формулы:

$\overline{(\forall x\in X)P(x)} = (\exists x\in X)\overline{P(x)}$ и $\overline{(\exists x\in X)P(x)} = (\forall x\in X)\overline{P(x)}$.

Если задана словесная формулировка высказывания с квантором, то нужно: 1) слово «любой» («каждый», «всякий», «все») заменить на слово «существует» («найдется», «некоторый», «хотя бы один») и наоборот; 2) поставить перед глаголом частицу «не».

Это правило сохраняется и в том случае, если высказывание содержит не один, а несколько кванторов, например:

$$\overline{(\forall x\in X)(\exists y\in Y)P(x,y)} = (\exists x\in X)(\forall y\in Y)\overline{P(x,y)} .$$

П р и м е р 1. Найти значения истинности высказываний:

а) среди чисел множества X = {1, 2, 3, 4} найдется простое число;

б) любое число из множества А = {6, 8, 12, 28} кратно 2.

Р е ш е н и е. а) Высказывание «Среди чисел множества X = {1, 2, 3, 4} найдется простое число» содержит квантор существования и поэтому может быть представлено в виде дизъюнкции высказываний: «1 – простое число», или «2 – простое число», или «3 – простое число» или «4 – простое число». Для доказательства истинности дизъюнкции достаточно истинности одного из высказываний, например: «2 – простое число», которое истинно. Следовательно, истинно и исходное высказывание.

б) Высказывание «Любое число из множества А = {6, 8, 12, 28} кратно 2» содержит квантор общности и поэтому может быть переформулировано в виде конъюнкции «6 кратно 2, и 8 кратно 2, и 12 кратно 2 и 28 кратно 2». Так как все четыре высказывания истинны, то истинна и вся конъюнкция, а, следовательно, и исходное высказывание.

П р и м е р 2. Выявить логическую структуру следующих высказываний:

а) некоторые четные числа делятся на 3;

б) сумма двух любых нечетных чисел кратна 2;

в) в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

Р е ш е н и е. а) В этом предложении имеется квантор существования, он выражен словом «некоторые», и предикат «четные числа делятся на 3», заданный на множестве X четных чисел. Обозначим предикат через A(x), тогда логическая структура данного предложения такова: $(\exists x \in X)$ A(x).

б) В данном предложении имеется квантор общности, он представлен словом «любой», и двухместный предикат «сумма двух нечетных чисел кратна 2», заданный на множестве нечетных натуральных чисел X. Обозначим предикат через P(x , y), тогда логическая структура данного предложения может быть записана в виде: $(\forall x \in X)$ $(\forall y \in X)$ P(x , y).

в) В данном высказывании квантора в явном виде нет, но подразумевается, что свойством «иметь взаимно перпендикулярные диагонали» обладают любые ромбы, следовательно, в данное высказывание можно включить квантор общности, не изменив его сути: «в любом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны». Тогда его структура такова: $(\forall x \in X)$ A(x), где X – множество ромбов, A(x) – предикат «в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны».

П р и м е р 3. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:

а) всякое число, умноженное на нуль, есть нуль;

б) уравнение $x + 3 = 5$ имеет решение в множестве натуральных чисел;

в) квадрат любого числа положителен.

Р е ш е н и е. а) Данное высказывание содержит квантор общности, он выражен словом «всякий». Предикат $x \cdot 0 = 0$ задан на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Поэтому высказывание можно записать в виде $(\forall x \in \boldsymbol{R})\ x \cdot 0 = 0$. Это высказывание истинное, поскольку по определению умножение числа на 0 дает 0.

б) В явном виде квантор в данном предложении не присутствует. Переформулируем предложение так: «В множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ существует число, которое является решением уравнения $x + 3 = 5$», теперь ясно, что здесь есть квантор существования (слово «существует»), и высказывание можно записать так: $(\exists x \in \boldsymbol{N})\ x + 3 = 5$. Высказывание истинное, потому что при $x = 2$ получим верное равенство.

в) Данное высказывание содержит квантор общности, он выражен словом «любой». Предикат $x^2 > 0$ определен на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Предложение можно записать так: $(\forall x \in \boldsymbol{R})\ x^2 > 0$. Высказывание является ложным, так как при $x = 0$ неравенство $0 > 0$ не выполняется.

Задание. Какие из следующих высказываний содержат квантор общности, а какие – квантор существования:

а)все натуральные числа делятся на 5;

б)существуют четные составные числа;

в)любое простое число нечетно;

г)человеку известны все виды животных, обитающие на Земле;

д)ни одно русское слово не содержит двух гласных подряд;

е)некоторые натуральные числа больше 999;

ж)в каждом треугольнике имеется прямой угол?

Практическое занятие – «Высказывания с кванторами».

Задания для самостоятельной работы: п. 5, упр. 6, 7, 9, 10.

Тема 2.6. Отрицание высказываний и высказывательных форм.

Основные понятия и термины по теме:

отрицание высказывания, отрицание высказывательной формы, законы де Моргана.

План изучения темы:

1. Понятие отрицания высказывания, таблица истинности отрицания;
2. Правила построения отрицания элементарного предложения;
3. Правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний;
4. Правила построения отрицания высказываний с кванторами;
5. Правила построения отрицания высказывательных форм.

Пусть предложение А – высказывание. Если перед сказуемым данного предложения поставить частицу «не» либо перед всем предложением поставить слова «неверно, что», то получится новое предложение, которое называется отрицанием данного и обозначается $\bar{A}$ (читают: «не А» или «неверно, что А).

Определение. Отрицанием высказывания А называется высказывание $\bar{A}$, которое ложно, когда высказывание А истинно, и истинно, когда высказывание А – ложно.

Таблица истинности отрицания имеет вид :

A	$\bar{A}$
и	л
л	и

Из данного определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

Построим отрицание ложного высказывания «число 28 делится на 9:

А) Число 28 не делится на 9.

Б) Неверно, что число 28 делится на 9.

Высказывания, которые мы получили, истинные. Значит, отрицание данного предложения построено правильно.

Рассмотрим теперь правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний. Если перед всем составным высказыванием поставим слова «неверно, что», то, безусловно, получим его отрицание. А как быть с частицей «не»? Можно ли поставить перед сказуемым составного предложения и получить его отрицание? На примере можно показать, что нельзя.

Можно доказать, что отрицанием конъюнкции двух высказываний А и В является дизъюнкция их отрицаний. Для этого надо убедиться в том, что значения истинности высказываний вида $A \wedge B$ и $A \vee B$ совпадают при любых значениях истинности высказываний А и В.

Про высказывания вида $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ говорят, что они равносильны, и пишут

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Аналогично можно доказать, что имеет место равносильность

$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Эти равносильности носят название **законов де Моргана**.

Из них вытекает следующее **правило построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции**: чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и).

П р и м е р 4. Построить отрицание высказывания «некоторые двузначные числа делятся на 12».

Р е ш е н и е. Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые») на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед глаголом. Получим высказывание «Все двузначные числа не делятся на 12».

П р и м е р 5. Сформулировать отрицание высказывания «В каждом классе хотя бы один ученик не справился с контрольной работой».

Р е ш е н и е. Данное высказывание содержит квантор общности, выраженный при помощи слова «каждый», и квантор существования, выраженный при помощи слов «хотя бы один». По правилу построения отрицаний высказываний с кванторами надо квантор общности заменить на квантор существования, а квантор существования – на квантор общности и убрать у глагола частицу «не». Получим: «Найдется такой класс, в котором все ученики справились с контрольной работой».

Практическое занятие – «Отрицание высказываний и высказывательныхформ».

Задания для самостоятельной работы по теме 5:

1. Постройте отрицания высказываний:

Петя не умеет играть на рояле.

Все люди носят очки.

Некоторые звери ходят на двух ногах.

Иногда собака ест траву.

Ни один человек не умеет летать.

Заяц всегда жует.

2. Запишите 6 истинных и 6 ложных высказываний со словами: все, некоторые, н одно, каждое. Постройте высказывания, по смыслу отрицающие данные.

п. 6, упр. 4, 5, 6, 7.

Тема 2.7.1. Отношения следования и равносильности между предложениями.

Основные понятия и термины по теме:

Следует, равносильно.

План изучения темы:

1. Определение отношения следования между высказывательными формами; различные прочтения отношения логического следования;
2. Определение отношения следования между высказывательными формами; различные прочтения отношения равносильности;
3. Выявление логической структуры предложений с отношениями следования и равносильности и их значений истинности.

Рассмотрим две высказывательные формы: «число х кратно 4» и «число х кратно 2», заданные на множестве N натуральных чисел.

Как связаны между собой эти два предложения?

Можно сказать так: из того, что число х кратно 4, следует, что х кратно 2. Это мы можем утверждать, потому что знаем – при всех значениях х, при которых истинно предложение «число х кратно 4», будет истинно и предложение «число х кратно 2». В этом случае говорят, что данные предложения находятся **в отношении логического следования.**

Определение. Высказывательная форма B(x) следует из высказывательной формы A(x), если B(x) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых A(x) истинна.

Если A и B – высказывания, тогда говорят, что из A следует B, если всякий раз, когда A истинно, истинно и B.

Для обозначения отношения логического следования используется знак ⇒. Соединяя две высказывательные формы A(x) и B(x) таким знаком, мы получаем высказывание A(x) ⇒ B(x), прочитать которое можно по разному:

1) Из A(x) следует B(x).
2) Всякое A(x) есть B(x).
3) Если A(x), то B(x).
4) B(x) есть следствие A(x).
5) A(x) есть достаточное условие для B(x).
6) B(x) есть необходимое условие для A(x).

Например, утверждение о том, что из предложения «число x кратно 4», следует предложение «число x кратно 2», можно сформулировать еще так:

- Всякое число, которое кратно 4, кратно и 2.
- Если число кратно 4, то оно кратно и 2.
- Кратность число 2 есть следствие кратности его 4.
- Кратность числа 4 есть достаточное условие для его кратности 2.
- Кратность числа 2 есть необходимое условие для его кратности 4.

Последние два предложения часто формулируют в следующей форме:

- Для того чтобы число было кратно 2, достаточно, чтобы оно было кратно 4.
- Для того чтобы число было кратно 4, необходимо, чтобы оно было кратно 2

Так как одно и то же утверждение «из A(x) следует B(x)» можно прочитать по-разному, надо уметь переходить от одной его формулировки к другой, не меняя смысла.

Задача 1. Данные предложения переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждения A(x) ⇒ B(x):

Всякий квадрат является прямоугольником.

Решение.

A(x) – «четырехугольник – квадрат» и B(x) – «четырехугольник – прямоугольник».

1) Из того, что четырехугольник – квадрат, следует, что он прямоугольник.
2) Если четырехугольник – квадрат, то он прямоугольник
3) Четырехугольник является прямоугольником – это следствие того, что четырехугольник – квадрат.
4) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы он был квадратом.
5) Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы он был прямоугольником.

Как и любое высказывание, предложение A(x) ⇒ B(x) может быть истинным или ложным. Но так как оно может быть сформулировано в виде «всякое A(x) есть B(x)», то его истинность устанавливается путем доказательства, а с помощью контрпримера – что оно ложно.

Определение. Предложения A(x) и B(x) равносильны, если из предложения A(x) следует предложение B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).

Для обозначения отношения равносильности используется знак ⇔. Соединяя две высказывательные формы A(x) и B(x) таким знаком, мы получаем высказывание A(x) ⇔ B(x), прочитать которое можно по-разному:

1) A(x) равносильно B(x).
2) A(x) тогда и только тогда, когда B(x).
3) A(x) – необходимо и достаточное условие для B(x).

4) B(x) - необходимое и достаточное условие для A(x).

Например, утверждение о том, что предложение «число делится на 3» и «сумма цифр в записи числа делится на 3» равносильны, можно сформулировать еще так:

- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его записи делится на 3.

- Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в его записи делилась на 3.

С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если TA – множество истинности высказывательной формы A(x), а TB – множество истинности высказывательной формы B(x), то TA = TB.

Например, уравнения $3x(x-2) = 0$ и $3x(x-2)(x+3) = 0$ равносильны на множестве целых неотрицательных чисел, потому что множество их решений $\{0, 2\}$.

Заметим, что мы рассматриваем понятия логического следования и равносильности для одноместных высказывательных форм. Для предложений, содержащих две и более переменных, эти понятия определяются аналогично.

Отметим также, что знак $\Leftrightarrow$ мы использовали раньше, в частности, рассматривая логическую структуру явных определений понятий. Мы установили, что ее можно представить в виде а$\Leftrightarrow$ в. Определение порождает два равносильных предложения.
Знак $\Leftrightarrow$ используют в записи правил построения отрицания высказываний. Например, $A \wedge B \Leftrightarrow A \vee B$. В этом случае речь идет о равносильности высказываний определенной формы. При этом считают, что предложения равносильны, если они одновременно истинны, либо одновременно ложны. Другими словами, если их значения истинности совпадают при одинаковых наборах значений высказываний A и B.
Задания для самостоятельной работы: п. 7, упр. 8, 9, 10, 11, 12.

Тема 2.7.2. Структура теоремы. Виды теорем.

Основные понятия и термины по теме:

Теорема, структура теоремы, прямая теорема; теорема, обратная данной; теорема, противоположная данной; теорема, обратная противоположной; закон контрапозиции.

План изучения темы:

1. Определение теоремы, структура теоремы;
2. Виды теорем.

Теорема– это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение A называют **условием** теоремы, а предложение B – ее **заключением**.

Например, условием теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали раны» является предложение «четырехугольник – прямоугольник, а заключением – предложение «в таком четырехугольнике диагонали равны».

В рассмотренном примере теорема была сформулирована с помощью слов «если …, то …». Но, как нам известно, утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому. Например, рассмотренную теорему можно сформулировать так: «во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны». Есть и другие способы, но удобнее теорему формулировать в виде «если …, то …», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что надо доказать).

В математике кроме **теорем** используются предложения, называемые **правилами и формулами**. Выясним, чем они отличаются от теоремы.

Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «если а – любое число и k, n – натуральные число, то справедливо равенство $a^n \bullet a^h = a^{n+h}$». Для того чтобы этой теоремой удобнее было пользоваться, при выполнении различных преобразований ее формулируют **в виде правила**: «при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются» или записывают только формулу.

Учитель должен уметь разворачивать изучаемые в начальной школе правила (формулы) и формулировать соответствующие им теоремы. Например, правило деления суммы на число: «для того чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные результаты сложить». К этой формулировке иногда добавляют **формулу: $(a + b) : c = a : c + b : c$.** Так как этот материал изучают в начальной школе, то надо отчетливо понимать, что числа могут быть только целыми неотрицательными, причем $c \neq 0$. Кроме того, воспользоваться правой частью этого равенства можно при условии, что a кратно c и b кратно c.

Для всякой теоремы вида **«если А, то В»** можно сформулировать предложение **«если В, то А»**, которое называют **обратным данному**. Однако не всегда это предложение является теоремой. Рассмотрим, например, теорему: «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это высказывание ложное, в чем можно убедиться, приведя контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником.

Рассмотрим теперь теорему «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково: «если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник – равнобедренный». Оно, как известно, истинное и поэтому является теоремой. Ее называют **теоремой, обратной данной**.

Для всякой теоремы вида «если А, то В» можно сформулировать предложение «если не А, то не В», которое называют противоположным. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны», будет ложным: «если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют **теоремой, противоположной данной**.

Таким образом, если для теоремы $A \Rightarrow B$ сформулировать обратное или противоположное предложения, то их надо доказывать (и тогда их можно называть соответственно обратной и противоположной теоремами) или опровергать.

Для всякой теоремы вида «если А, то В» можно сформулировать предложение «если не В, то не А», которое называют обратным противоположному. Например, для теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» предложение, обратное противоположному, будет таким: «если в четырехугольнике диагонали не равны, то он не является прямоугольником». Это, как известно, предложение истинное и, следовательно, является теоремой. Ее называют **обратно противоположной данной.**

Вообще для какой бы теоремы мы ни формулировали предложение, обратное противоположному, оно всегда будет теоремой, потому что имеется следующая равносильность: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$.

Эту равносильность называют **законом контрапозиции**. Мы принимаем его без доказательства. Согласно этому закону, предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и, значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

Кроме того, из закона контрапозиции следует, что предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, одновременно истинны либо одновременно ложны. Поэтому, рассматривая их, достаточно доказать (или опровергнуть) какое-нибудь одно; тем самым будет доказано (опровергнуто) другое.

Заметим, что если для данной теоремы A ⇒ B существует обратная B ⇒A, то их можно соединить в одну A ⇔ B, и тогда в формулировке будут использованы слова «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда». Например: «треугольник будет равнобедренным тогда и только тогда, когда в нем углы при основании равны».

С другой стороны, если теорема имеет вид A ⇔ B, то это значит, что она состоит из двух взаимно обратных теорем A ⇒ B и B ⇒A и, следовательно, ее доказательство сводится к доказательству двух указанных теорем.

Задания для самостоятельной работы: п. 8, упр. 5, 6, 7,8, 9.

Контрольная работа.

РАЗДЕЛ 3. ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА И ПРОЦЕСС ЕЁ РЕШЕНИЯ.

Тема 3.1. Структура текстовой задачи.Методы и способы решения текстовых задач.

Основные понятия и термины по теме:

Текстовая задача, утверждение, требование задачи, высказывательная модель задачи, определенные задачи, недоопределенные задачи, переопределенные задачи, решение задачи, арифметический и алгебраический методы решения текстовой задачи, моделирование.

План изучения темы:

1. Понятие текстовой задачи, её структуры.
2. Утверждения и требования задачи.
3. Высказывательная модель задачи.
4. Виды задач.
5. Методы и способы решения текстовой задачи.

Кроме различных понятий, предложений, доказательств в любом математическом курсе есть задачи. В обучении математике младших школьников преобладают такие, которые называют арифметическими, текстовыми, сюжетными. Эти задачи сформулированы на естественном языке (поэтому их называют ***текстовыми***); в них обычно описывается количественная сторона каких-то явлений, событий (поэтому их называют арифметическими или сюжетными); они представляют собой задачи на разыскивание искомого и сводятся к вычислению неизвестного значения некоторой величины (поэтому их иногда называют вычислительными).

Решению текстовых задач при начальном обучении уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и главное – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления детей.

Существуют различные методические подходы к обучению младших школьников решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения ни брал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать различными методами и способами.

Как было сказано выше, любая текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса). С этой точки зрения текстовая задача есть словесная модель явления (ситуации, процесса). И, как во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны, главным образом, его количественные характеристики. Рассмотрим, например, такую задачу: «Автомобиль выехал из пункта А со скоростью 60 км/ч. Через 2ч вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от А второй автомобиль догонит первый?».

В задаче описывается движение двух автомобилей. Как известно, любое движение характеризуется тремя величинами: пройденным расстоянием, скоростью и временем движения. В данной задаче известны скорости первого и второго автомобилей (60 км/ч и 90 км/ч), известно, что они прошли одно и то же расстояние от пункта А до места встречи, количественную характеристику которого и надо найти. Кроме того, известно, что первый автомобиль был в пути на 2 ч больше, чем второй.

Обобщая, можно сказать, что ***текстовая задача есть описание на естественном языке некоторого явления (ситуации, процесса) с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этого явления, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между компонентами или определить вид этого отношения.***

Рассмотрим еще одну задачу из начального курса математики: «Свитер, шапку и шарф связали из 1 кг 200 г шерсти. На шарф потребовалось на 100 г шерсти больше, чем на шапку, и на 400 г меньше, чем на свитер. Сколько шерсти израсходовали на каждую вещь?»

В задаче речь идет о расходовании шерсти на свитер, шапку и шарф. Относительно этих объектов имеются определенные ***утверждения*** и ***требования.***

Утверждения:

1. Свитер, шапка и шарф связаны из 1200 г шерсти.
2. На шарф израсходовали на 100 г больше, чем на шапку.
3. На шарф израсходовали на 400 г меньше, чем на свитер.

Требования:

1. Сколько шерсти израсходовали на свитер?
2. Сколько шерсти израсходовали на шапку?
3. Сколько шерсти израсходовали на шарф?

Утверждения в задаче называют ***условиями*** (или условием, как в начальной школе). В задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и в утвердительной форме. Условия и требования взаимосвязаны.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют ***высказывательной моделью задачи.***

Таким образом, чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру. Иными словами, надо построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (сделать это можно письменно или устно), так как текст задачи, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно перефразировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т.д.

Кроме того, вычленение условий задачи можно производить с разной глубиной. Глубина анализа условий и требований задачи зависит главным образом от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знаем ли мы способ решения таких задач.

Пример 1

Сформулируйте условия и требования задачи: Две девочки одновременно побежали навстречу друг другу по спортивной дорожке, длина которой 420 м. Когда они встретились, первая пробежала на 60 м больше, чем вторая. С какой скоростью бежала каждая девочка, если они встретились через 30 с?

В задаче речь идет о движении двух девочек навстречу друг другу. Как известно, движение характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем.

Условия задачи:

1. Две девочки бегут навстречу друг другу.
2. Движение они начали одновременно.
3. Расстояние, которое они пробежали, - 420 м.
4. Одна девочка пробежала на 60 м больше, чем другая.
5. Девочки встретились через 30 с.
6. Скорость движения одной девочки больше скорости движения другой.

Требования задачи:

1. С какой скоростью бежала 1-я девочка?
2. С какой скоростью бежала 2-я девочка?

По отношению между условиями и требованиями различают:

а) ***определенные задачи*** - в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований;

б) ***недоопределенные задачи*** – в них условий недостаточно для получения ответа;

в) ***переопределенные задачи*** – в них имеются лишние условия.

В начальной школе ***недоопределенные задачи считают задачи с недостающими данными, переопределенные – задачами с избыточными данными.***

Например, задача «Возле дома росло 5 яблонь, 2 вишни и 3 березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?» является переопределенной, так как содержит лишнее условие.

Задача: «Из зала вынесли сначала 12 стульев, потом еще 5. Сколько стульев осталось в зале?» является недоопределенной – в ней условий недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Уточним теперь смысл термина «решение задачи». Так сложилось, что этим термином обозначают разные понятия:

1. ***решением задачи*** называют результат, т.е. ответ на требование задачи;
2. ***решением задачи*** называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результата (например, говорят о решении задачи арифметическим способом) и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод (т.е. в данном случае под решением задачи понимается вся деятельность человека, решающего задачу).

Задания для самостоятельной работы – п. 1, упр. 6, 7, 8.

Основными методами решения текстовых задач являются *арифметический* и *алгебраический.*

Решить задачу ***арифметическим методом – это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.***

Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи.

Решим, например, различными арифметическими способами такую задачу: «Сшили 3 платья, расходуя на каждое по 4 м ткани. Сколько кофт можно было сшить из этой ткани, если расходовать на одну кофту 2 м?».

1 способ

1. 4·3=12 (м) – столько было ткани.
2. 12:2=6 (кофт) – столько кофт можно сшить из 12 м ткани.

2 способ

1. 4:2 = 2 (раза) – во столько раз больше идет ткани на платье, чем на кофту;
2. 3 ·2=6 (кофт) – столько кофт можно сшить.

Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений.

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения (системы уравнений), это означает, что данную задачу можно решить ***различными алгебраическими способами.***

Например, задачу о массе шерсти, израсходованной на свитер, шапку и шарф, можно решить тремя различными способами.

1 способ

Обозначим через Х(г) массу шерсти, израсходованной на шапку. Тогда на шарф будет израсходовано (х + 100) г, а на свитер ((х+10)+400) г. Так как на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение х+ (х+100)+((х+100)+400)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=200. Таким образом, на шапку было израсходовано 200 г, на шарф – 300 г, так как 200+100=300, на свитер – 700 г, так как (200+100) + 400=700.

2 способ

Обозначим через х (г) массу шерсти, израсходованной на шарф. Тогда на шапку будет израсходовано (х-100) г, а на свитер – (х+400) г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение: х+ (х – 100)+(х+400)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=300. Таким образом, если на шарф израсходовали 300 г, то на шапку 200 г (300-100=200), а на свитер 700 г (300+400 =700).

3 способ

Обозначим через х(г) массу шерсти, израсходованной на свитер. Тогда на шарф будет израсходовано (х-400) г, а на шапку (х-400-100) г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение: х+(х-400)+(х-500)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=700. Таким образом, если на свитер израсходовано 700г, то на шарф пошло 300г (700-400=300), а на шапку – 200 г (700-400-100=200).

Задания для самостоятельной работы – п. 2, упр. 2, 3.

2. Тема 3.2.Этапы решения задачи и приемы их выполнения.

Основные понятия и термины по теме:

Анализ задачи, аналитический и синтетический виды анализа решения задачи, математическое моделирование, схематизированные и знаковые модели, вспомогательные модели**.**

План изучения темы:

1. Этапы решения задачи. Способы их выполнения.
2. Моделирование в процессе решения текстовых задач.
3. Примеры использования вспомогательных моделей при решении задач.

Решение любой задачи – процесс сложной умственной деятельности. Чтобы овладеть им, надо знать основные этапы решения задачи и некоторые приемы их выполнения.

Деятельность по решению задачи арифметическим методом включает следующие этапы:

1. Анализ задачи.
2. Поиск плана решения задачи.
3. Осуществление плана решения задачи.
4. Проверка решения задачи.

+В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Все зависит от уровня знаний и умений решающего. Например, если после прочтения задачи вы обнаружите, что она известного вам вида и вы знаете, как ее решать, то, конечно, поиск плана не вычленяется в отдельный этап. Однако полное, логически завершенное решение обязательно содержит все указанные этапы, а знание приемов их выполнения делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, и более успешным.

1. Анализ задачи

Основное назначение этого этапа - понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними.

Производя анализ задачи, вычленяя ее условия, мы должны соотносить этот анализ с требованиями задачи. Другими словами, ***анализ задачи всегда направлен на ее требования.***

Известно несколько приемов, которые можно использовать при анализе задачи.

Разобраться в содержании задачи, вычленить условия и требования можно, если задать специальные вопросы и ответить на них.

О чем задача, т.е. о каком процессе (явлении, ситуации) идет речь в задаче, какими величинами характеризуется этот процесс?

Что требуется найти в задаче?

Что обозначают те или иные слова в тексте задачи?

Что в задаче известно о названых величинах?

Что неизвестно?

Что является искомым?

Рассмотрим задачу: «По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения и до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака?».

Воспользуемся указанным приемом.

1. О чем задача?

- Задача о движении двух мальчиков и собаки. Оно характеризуется для каждого из участников движения скоростью, временем и пройденным расстоянием.

2. Что требуется найти в задаче?

- В задаче требуется найти расстояние, которое пробежит собака за все время от начала движения, пока мальчики не окажутся рядом, т.е. второй не догонит первого.

3. Что в задаче известно о движении каждого из его участников?

- В задаче известно, что: а) мальчики идут в одном направлении; б) до начала движения расстояние между мальчиками было 2 км; в) скорость первого мальчика, идущего впереди, 4 км/ч; г) скорость второго мальчика, идущего позади, 5 км/ч; д) скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч; е) время движения, когда расстояние между мальчиками было 2 км, до момента встречи.

4. Что в задаче неизвестно?

В задаче неизвестно время, за которое второй мальчик догонит первого, т.е. неизвестно время движения всех его участников. Неизвестно также, с какой скоростью происходит сближение мальчиков. И неизвестно расстояние, которое пробежала собака, - это требуется узнать в задаче.

5. Что является искомым: число, значение величины, вид некоторого отношения?

- Искомым является значение величины – расстояния, которое пробежала собака за время от начала движения мальчиков до момента встречи.

Большую помощь в осмыслении задачи оказывает другой прием – ***перефразировка текста задачи.*** Он заключается в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Это достигается в результате отбрасывания несущественной, излишней информации, замены описания некоторых понятий соответствующими терминами и, наоборот, замены некоторых терминов описанием содержания соответствующих понятий; преобразование текста задачи в форму, удобную для поиска плана решения.

Особенно эффективно использование данного приема в сочетании с разбиением текста на смысловые части.

Результатом перефразировки должно быть выделение основных ситуаций.

Поскольку в задаче, рассмотренной выше, речь идет о движении, ее можно перефразировать следующим образом:

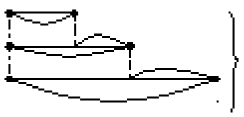
«Скорость одного мальчика 4 км/ч, а скорость догоняющего его второго мальчика 5 км/ч (это первая часть). Расстояние, на которое мальчики сблизились, 2 км (вторая часть). Время движения мальчиков – это время, в течение которого второй мальчик догонит первого, т.е. в течение которого второй мальчик пройдет на 2 км больше, чем первый (третья часть). Скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч. Время движения собаки равно времени движения мальчиков до встречи (четвертая часть). Требуется определить расстояние, которое пробежала собака».

Перефразированный текст часто бывает полезно записать в таблице.

Например, рассматриваемую задачу можно записать с помощью таблицы такого вида:

Скорость	Время	Расстояние
1-й мальчик – 4 км/ч 2-й мальчик – 5 км/ч Собака- 8 км/ч	? ? Одинаковое ?	? ? На 2 км больше 1-го мальчика ?

Построением схематического чертежа может быть завершен анализ задачи о массе шерсти, израсходованной на шапку, шарф и свитер. Для этого условимся массу шерсти, израсходованной на шапку, изобразить в виде отрезка произвольной длины. Тогда массу шерсти, израсходованной на шарф и свитер, можно изобразить так, как показано на рисунке.



Шапка
? 100 г
Шарф
? 400 г 1200 г
Свитер
?

И таблица, и схематический чертеж являются вспомогательными моделями задачами. Они служат формой фиксации анализа текстовой задачи и являются основным средством поиска плана ее решения.

После построения вспомогательной модели необходимо проверить:

1. все ли объекты задачи и их величины показаны на модели;
2. все ли отношения между ними отражены;
3. все ли числовые данные приведены;
4. есть ли вопрос (требование) и правильно ли он указывает искомое?
5. 4. Поиск и составление плана решения задачи
6. Назначение этого этапа: установить связь между данными и искомыми объектами, наметить последовательность действий.
7. План решения задачи – это лишь идея решения, его замысел. Может случиться, что найденная идея неверна. Тогда надо вновь возвращаться к анализу задачи и начинать все сначала.

8. Как искать план решения задачи? Односложного ответа на этот вопрос нет. Поиск плана решения задачи является трудным процессом, который точно не определен. Можно только указать некоторые приемы, которые позволят осуществить этот этап. Одним из наиболее известных приемов поиска плана решения задачи арифметическим способом является ***разбор задачи по тексту или по ее вспомогательной модели.***

9. Разбор задачи проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться ***как от данных задачи, так и от ее вопросов.***

10. При разборе задачи ***от данных к вопросу*** решающий выделяет в тексте задачи два данных и на основе знания связи между ними (такие знания должны быть получены при анализе задачи) определить, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого арифметического действия. Затем, считая это неизвестное данным, решающий выделяет два взаимосвязанных данных, определяет неизвестное, которое может быть найдено по ним и с помощью какого действия и т.д., пока не будет выяснено, какое действие приводит к получению искомого в задаче объекта.

11. Проведем такой разбор по тексту задачи:

12. «На поезде, который шел со скоростью 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем проехал. Каков весь путь туриста?»

13. Рассуждения ведем от данных к вопросу: известно, что 6 ч турист проехал на поезде, который шел со скоростью 56 км/ч; по этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч, - для этого достаточно скорость умножить на время. Зная пройденную часть расстояния и то, что оставшееся расстояние нужно умножить на 4 (увеличить в 4 раза). Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось ехать, можем найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути. Итак, первым действием будем находить расстояние, которое турист проехал на поезде; вторым действием – расстояние, которое ему осталось проехать; третьим – весь путь.

14. При разборе задачи ***от вопроса к данным*** нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить (на основе информации, полученной при анализе задачи), что достаточно узнать для ответа на этот вопрос. Для чего нужно обратиться к условиям и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет или есть только одно данное, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данное (недостающие данные), и т.д. Потом составляется план решения задачи. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке.

15. Проведем такой разбор той же задачи о движении туриста, строя цепочку рассуждений от вопроса к данным: «В задаче требуется узнать весь путь туриста. Мы установили, что путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения требования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров ему осталось проехать. И то, и другое неизвестно. Чтобы найти пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем путь, который турист проехал. Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза (умножив на 4). Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь».

16. Поиск плана решения задачи может проводиться по вспомогательной модели, выполненной при анализе задачи.

17. Покажем, как можно осуществить поиск плана решения задачи о массе шерсти, израсходованной на шарф, шапку и свитер, по схематическому чертежу.

18. +По чертежу видно, на сколько больше израсходовано на свитер, чем, например, на шарф; если из всей массы шерсти вычесть 400 г, то мы узнаем, сколько бы всего израсходовали шерсти, если бы на свитер израсходовали столько же, сколько на шарф. Далее, если к этой массе шерсти прибавить 100 г, то мы узнаем, сколько бы всего израсходовали шерсти, если бы на шапку израсходовали столько же, сколько на шарф. Разделив полученное число на 3, найдем массу шерсти, израсходованной на шарф. Вычтя

из полученного результата 100 г, а затем, прибавив к нему 400 г, найдем массу шерсти, использованную на шапку и на свитер.

19. Заметим, что поиск плана решения данной задачи по схематическому чертежу может быть проведен иначе (сделайте это самостоятельно), - в результате мы получим различные арифметические способы ее решения.

Осуществление плана решения задачи

Назначение данного этапа – найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, используются следующие приемы:

- запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами);
- запись в виде выражения.

Приведем примеры различных записей плана решения задачи: «На поезде, скорость которого 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем он проехал. Каков весь путь туриста?»

Запись решения по действиям с пояснением к каждому выполненному действию.

1. 56·6=336 (км) – турист проехал за 6 ч.
2. 336·4=1344(км) – осталось проехать туристу.
3. 336+1344=1680(км) – должен был проехать турист.

Если пояснения даются в устной форме (или совсем не даются), то запись будет следующей:

1. 56·6=336 (км)
2. 336·4=1344 (км)
3. 336+1344=1680 (км)

Запись решения по действиям с вопросами:

1)Сколько километров проехал турист на поезде?

56·6=336(км)

2) Сколько километров осталось проехать туристу?

336·4=1344(км)

3) Сколько километров турист должен был проехать?

336+1344=1680(км)

Запись решения в виде выражения:

Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записываются отдельные шаги в соответствии с планом, затем составляется выражение и находится его значение. Так как обычно это значение записывают, то запись становится числовым равенством, в левой части которого – выражение, составленное по условию задачи, а в правой – его значение, оно – то и позволяет сделать вывод о выполнении требований задачи.

Так, для рассматриваемой задачи эта форма записи имеет вид:

56·6 (км) – расстояние, которое проехал турист на поезде за 6ч

56·6·4(км) – расстояние, которое осталось проехать туристу

56·6+56·6·4 (км) – путь, который должен проехать турист

56·6 + 56·6·4=1680 (км)

Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме.

Тогда запись решения задачи примет вид:

56·6 + 56·6·4=1680 (км)

6. Проверка решения задачи

Назначение этого этапа – установить правильность или ошибочность выполненного решения.

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача. Рассмотрим основные.

Установление соответствия между результатом и условиями задачи.

Для этого найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия. Проверим, используя данный прием, правильность решения задачи о движении туриста.

Мы установили, что турист должен был проехать 1680 км. Пусть теперь этот результат будет одним из данных задачи. Далее, как известно, за 6ч турист проедет 336 км ($56 \cdot 6=336$) и ему останется проехать $1680 - 336=1344$ (км). Согласно условию задачи это расстояние должно быть в 4 раза больше того, которое турист проехал на поезде за 6 ч. Проверим это, разделив 1344 на 336. Действительно, $1344:336=4$. Следовательно, если найденный результат подставить в условие задачи, то противоречий с другими данными, а именно отношением «быть больше в 4 раза», не возникает. Значит, задача решена верно.

Заметим, что при использовании данного приема проверяются все отношения, имеющиеся в задаче, и если устанавливается, что противоречия не возникает, то делают вывод о том, что задача решена верно.

Решение задачи другим способом.

Пусть при решении задачи каким-то способом получен некоторый результат. Если ее решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод о том, что задача была решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить, решив задачу алгебраическим методом.

Не следует думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается, прежде всего, четкими и логичными рассуждениями на всех других этапах работы над задачей.

Моделирование в процессе решения текстовых задач

Текстовая задача – это словесная модель некоторого явления (ситуации, процесса). Чтобы решить такую задачу, надо перевести ее на язык математических действий, т.е. построить *математическую модель.*

Вообще, ***математическая модель – это описание какого-либо реального процесса на математическом языке.***

Математической моделью текстовой задачи является ***выражение*** (либо запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и ***уравнение*** (либо система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

В процессе решения задачи четко выделяются три этапа математического моделирования:

<u>1 этап</u> – это перевод условий задачи на математический язык; при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые и математическими способами описываются связи между ними;

<u>2 этап</u> – внутримодельное решение (т.е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения);

<u>3 этап</u> – интерпретация, т.е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована задача.

Проиллюстрируем сказанное на примере решения алгебраическим методом следующей задачи: «В одном вагоне электропоезда было пассажиров в 2 раза больше, чем в другом. Когда из первого вагона вышли 3 человека, а во второй вагон вошли 7 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?»

Обозначим через x первоначальное число пассажиров во втором вагоне. Тогда число пассажиров в первом вагоне – 2x. Когда из первого вагона вышли 3 человека, в нем осталось $2x - 3$ пассажира. Во второй вагон вошли 7 человек, значит, в нем стало $x + 7$

пассажиров. Так как в обоих вагонах пассажиров стало поровну, то можно записать, что $2x - 3 = x + 7$. Получили уравнение – это математическая модель данной задачи.

Следующий этап – решение полученного уравнения вне зависимости от того, что в нем обозначает переменная x: переносим в левую часть члены уравнения, содержащие x, а в правую – не содержащие x, причем у переносимых членов знаки меняем на противоположные: $2x - x = 7 + 3$. Приводим подобные члены и получаем, что $x = 10$.

Последний, третий этап – используем полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи: во втором вагоне было первоначально 10 человек, а в первом – 20 ($10 \cdot 2 = 20$).

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический, т.е. 1 этап математического моделирования. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели – схемы, таблицы и др. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной модели реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (схемы, таблицы, рисунки и т.д.); от нее – к математической, на которой и происходит решение задачи. Такой подход к процессу решения задачи разделяют и психологи. Они считают, что процесс решения задачи есть сложный процесс поиска системы моделей и определенной последовательности перехода от одного уровня моделирования к другому, более обобщенному, что решение задачи человеком есть процесс ее переформулирования. При этом используется такая операция мышления, как анализ через синтез, когда объект в процессе мышления включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах. Главным средством переформулирования является ***моделирование.***

Прием моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта (в нашем случае текстовой задачи) выбирают (или строят) другой объект, в каком-то отношении подобный тому, который исследуют. Построенный новый объект изучают, с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результат переносят на первоначальный объект. Модели бывают разные, и поскольку в литературе нет единообразия в их названиях, уточним терминологию, которую будем использовать в дальнейшем.

Все модели можно разделить на ***схематизированные*** **и** ***знаковые*** **по** ***видам средств, используемых для построения***.

Схематизированные модели, в свою очередь, делятся на *вещественные* и *графические в зависимости от того, какое действие они обеспечивают*.

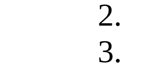
Вещественные (или предметные) модели текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких – либо предметов (пуговиц, спичек, бумажных полосок и т. д.), они могут быть представлены разного рада инсценировками сюжета задач. К этому виду моделей причисляют и мысленное воссоздание реальной ситуации, описанной в задаче, в виде представлений.

Графические модели используются, как правило, для обобщенного, схематического воссоздания ситуации задачи. К графическим следует отнести следующие виды моделей:

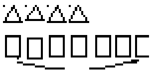
1. рисунок;
2. условный рисунок;
3. чертеж;
4. схематичный чертеж (или просто схема).

Разъясним суть этих моделей на примере задачи: «Лида нарисовала 4 домика, а Вова на 3 домика больше. Сколько домиков нарисовал Вова?»

Рисунок в качестве *графической модели* этой задачи имеет вид:


Л.
В.
?

Условный рисунок может быть таким, как на рисунке:

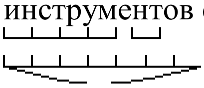


Л.

В.

?

Чертеж как графическая модель выполняется при помощи чертежных инструментов с соблюдением заданных отношений.



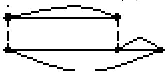
Л. 1д.

В.

?

Схематический чертеж (схема) может выполнятся от руки, на нем указываются все данные и искомые.

4 д.



Л.

3 д.

В.

?

Знаковые модели могут быть выполнены как на естественном, так и на математическом языке. К знаковым моделям, выполненным на естественном языке, можно отнести краткую запись задачи, таблицы. Например, *краткая запись задачи* о домиках Лиды и Вовы может быть такой:

Л. – 4 д.

В. - ?, на 3 д. больше, чем

Таблица как вид знаковой модели используется главным образом тогда, когда в задаче имеется несколько взаимосвязанных величин, каждая из которых задана одним или несколькими значениями. Пример такой таблицы мы уже рассматривали.

Знаковыми моделями текстовых задач, выполненных на математическом языке, являются: выражение, уравнение, система уравнений, запись решения по действиям. Поскольку на этих моделях происходит решение задачи, их называют ***решающими моделями***. Остальные модели, все схематизированные и знаковые, выполненные на естественном языке, - это ***вспомогательные модели,*** которые обеспечивают переход от текста задачи к математической модели.

Не следует думать, что всякая краткая запись или чертеж, выполненные для данной задачи, являются ее моделями. Так как модель – это своеобразная копия задачи, то на ней должны быть *представлены все ее объекты, все отношения между ними, указаны требования.* Для большинства текстовых задач приходится строить различные вспомогательные модели. С одной стороны, эти модели представляют собой результат анализа задачи, но с другой – построение таких моделей организует и направляет детальный и глубокий анализ задачи.

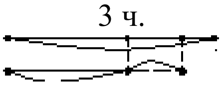
Рассмотрим процесс решения арифметическим методом текстовой задачи о пассажирах в двух вагонах.

Предварительный анализ задачи позволяет выделить ее объекты – это пассажиры в двух вагонах поезда. О них известно, что: 1) В первом вагоне в 2 раза больше пассажиров, чем во втором. 2) Из первого вагона вышли 3 пассажира. 3) Во второй вошли 7 пассажиров. 4) В первом и втором вагонах пассажиров стало поровну.

В задаче два требования: 1) Сколько пассажиров было первоначально в первом вагоне? 2) Сколько пассажиров было первоначально во втором вагоне?

Построим графическую модель данной задачи в виде схематического чертежа:

3 ч.



I

? 7 ч.

II

?

По схеме сразу видно, что математическая модель данной задачи имеет вид:

7+ 3 – это число пассажиров во втором вагоне, а (7 + 3) · 2 – это число пассажиров в первом вагоне.

+Произведя вычисления, получаем ответ на вопрос задачи: во втором вагоне было 10 пассажиров, а в первом – 20 пассажиров.

Практическое занятие. Решение текстовых задач.

Задания для самостоятельной работы: п. 5, упр. 5, 6, 7, 8.

Тема 3.3. Решение задач «на части».

Задачи на части. Само название вида задач говорит о том, что рассматриваемые в них величины состоят из частей**.** В некоторых из них части представлены явно, в других надо суметь выделить, приняв подходящую величину за 1 часть и определив, из скольких таких частей состоят другие величины, о которых идет речь в задаче.

Задача 1. Для варки варенья из вишни на 2 части ягод берут 3 части сахара. Сколько сахара надо взять на 10 кг ягод?

Решение: В задаче идет речь о массе ягод и массе сахара, необходимых для варки варенья. Известно, что всего ягод 10 кг и что на 2 части ягод надо брать 3 части сахара. Требуется найти массу сахара, чтобы сварить варенье из 10 кг ягод.

Изобразим при помощи отрезка массу ягод. Тогда половина отрезка представляет собой массу ягод, которая приходиться на 1 часть. Сахара же по условию задачи надо 3 таких части.

Запишем решение по действиям с пояснениями:

1) 10 : 2 = 5 (кг) – столько кг ягод приходится на каждую часть;

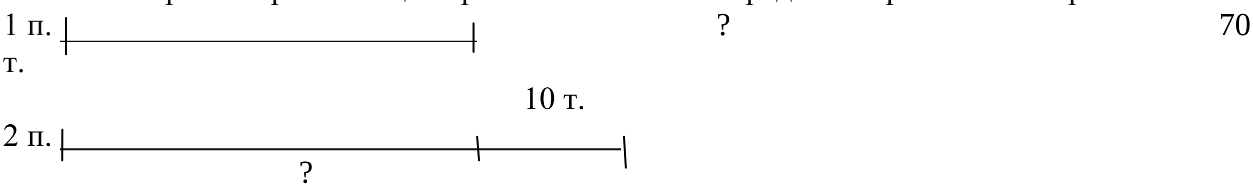
2) $5 \times 3 = 15$ (кг) – столько надо взять сахара.

Ответ: необходимо взять 15 кг сахара.

Задача 2. В первой пачке было на 10 тетрадей меньше, чем во второй. Всего было 70 тетрадей. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

Решение: В задаче рассматриваются две пачки тетрадей. Всего тетрадей 70. В одной пачке на 10 тетрадей больше. Требуется узнать количество тетрадей в каждой пачке.

Изобразим при помощи отрезка количество тетрадей в первой и во второй пачке.



По чертежу видно, что если тетради в первой пачке составляют 1 часть всех тетрадей, то тетради во второй пачке составляют 1 часть и еще 10 тетрадей.

Если эти 10 тетрадей убрать из второй пачки, то в пачках станет поровну. Запишем решение по действиям.

1) 70 – 10 = 60 (т) – столько тетрадей приходится на 2 равные части, или столько было бы тетрадей в двух пачках, если бы их было поровну;

2) 60 : 2 = 30 (т) – столько тетрадей приходится на 1 часть, или столько тетрадей было в первой пачке;

3) 30 + 10 = 40 (т) – столько тетрадей было вовторой пачке.

Мы использовали при решении вспомогательную модель – чертеж, которая показывает и второй способ решения. Если за 1 часть принять тетради в первой пачке, то чтобы во второй стало столько же, надо к ней прибавить 10 тетрадей:

2) 70 + 10 = 80 (т.)
3) 80 : 2 = 40 (т.)
4) 40 – 10 = 30 (т.)

Существует и третий арифметический способ решения данной задачи:

1) 10 : 2 = 5(т.) – столько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы в них стало поровну;

2) 70 : 2 = 35 (т.) – столько тетрадей в каждой пачке, если из первой переложить во вторую 5 тетрадей;

3) 35 + 5 = 40 (т.) – столько тетрадей вовторой пачке;

4) 35 – 5 = 30 (т.) – столько тетрадей в первой пачке.

Ответ: в первой пачке 30 тетрадей, во второй – 40 тетрадей.

Задача. В новом книжном шкафу на каждой полке разместилось на 8 книг больше, чем в старом. Поэтому, в новом шкафу на 5 полках укладывается столько книг, сколько в старом на 7. Сколько книг размещается на одной полке нового шкафа?

Решение: Пусть x книг – на одной полке в новом шкафу. Тогда $(x – 8)$ книг – в старом шкафу. $5x$ (книг) – на пяти полках в новом шкафу. $7(x – 8)$ (книг) – на семи полках старого шкафа. Получим уравнение: $5x = 7(x – 8)$. Решаем его. $5x = 7x – 56$; $x = 28$.

Ответ: 28 книг в новом шкафу.

Задача. В двух бидонах 28 л краски. Когда из первого израсходовали 3 л, а во второй долили 2 л, то в первом бидоне стало на 7 л больше, чем во втором. Сколько краски было в начале в каждом бидоне?

Решение: Пусть было x л краски в первом бидоне, $(28 – x)$ л – во втором. Тогда, после того, как израсходовали краску из первого бидона, в нем стало на 7 л больше чем во втором: $(x - 3) – 7 = 28 – x + 2$. Решаем уравнение: $2x = 40$; $x = 20$. Значит, 20л было в первом бидоне. А во втором было $28 – x = 8$(л).

Ответ: В первом бидоне было 20 л краски, во втором – 8 л.

Практическая работа «Решение задач «на части».

Задания для самостоятельной работы: п. 4, упр. 4, 5, 6, 7.

Практическая часть

<u>Обязательные задания</u>

1. Решите различными способами (практическим, арифметическим, алгебраическим, графическим) следующую задачу: «В гараже стояло 10 машин. После того, как несколько машин уехало, осталось 6. Сколько машин выехало из гаража?».

2. С противоположных концов катка длиной 180 м бегут навстречу друг другу два мальчика. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если один пробегает 9 м в секунду, а другой 6 м в секунду?

Объясните, используя условия данной задачи, смысл следующих выражений: а) 9+6; б)180:9; в) 180:6; г) 180:(9+6). Какое из этих выражений является решающей моделью данной задачи?

3. Запишите решение задачи в виде выражения:

а) Самолет пролетел за 2 ч a км. Сколько километров он пролетит за 5 ч?

б) Из двух городов, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали легковой автомобиль и грузовой и встретились через t ч. Скорость легкового автомобиля *v* км/ч. Найдите скорость грузовика.

в) Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль и мотоцикл и встретились через t ч. Найдите расстояние между городами, если скорость автомобиля v_1 км/ч, а скорость мотоцикла v_2 км/ч.

3. Два пассажира метро, начавшие одновременно один спуск, другой подъем на движущихся лестницах метро, поравнялись через 30 с. Вычислите длину лестницы, если скорость ее движения 1 м/с.Решите задачу двумя арифметическими способами.

4. Расстояние между городами А и В 520 км. В 8 ч из А в В выехал автобус со скоростью 56 км/ч, а в 11 ч того же дня из В в А выехал грузовой автомобиль со скоростью 32 км/ч. На каком расстоянии от А встретятся машины? Решение задачи запишите по действиям и в виде выражения.

5. Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 8 ч после выхода. Найдите скорость каждого поезда, если один проходил в час на 16 км больше другого.

6. Решите нижеприведенные задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям с пояснениями.

а) Из А в В выехал мотоциклист, проезжавший в час 48 км. Через 45 мин из В в А выехал другой мотоциклист, скорость которого была 50 км/ч. Зная, что расстояние АВ равно 330 км, найдите, на каком расстоянии от В мотоциклисты встретятся.

б) Из двух городов, расстояние между которыми 484 км, выехали одновременно навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Через 4 ч расстояние между ними оказалось 292 км. Определите скорость велосипедиста и мотоциклиста, если скорость мотоциклиста в 3 раза больше скорости велосипедиста.

3. Установите, достаточно ли данных для ответа на требование задачи:

а) Из двух сел, расстояние между которыми 36 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились. Скорость одного пешехода 4 км/ч. С какой скоростью шел другой пешеход?

б) Расстояние между станциями 780 км. Одновременно навстречу друг другу с этих станций вышли два поезда и через 6 ч встретились. Найдите скорость каждого поезда, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

В случае если нельзя ответить на требование задачи, дополните ее условие недостающими данными и решите задачу.

3. Есть ли среди нижеприведенных задачи с лишними данными:

а) Расстояние между плотом и катером, которые движутся по р навстречу друг другу, 52 км. Скорость плота 4 км/ч, а скорость кат 9 км/ч. Как изменится расстояние между ними через час?

б) Почтальон живет на расстоянии 24 км от почтового отделен Путь от дома до почты он проехал за 3 ч на велосипеде со скоростью 8 км/ч, а обратный путь по той же дороге он проехал со скоростью 6 км/ч. На какой путь почтальон потратил меньше времени и на сколько часов?

В случае если в задаче есть лишние данные, то исключите их и запишите получившуюся задачу.

3. Два теплохода отправились одновременно от пристани в одном и том же направлении. Скорость одного теплохода 25 км/ч, другого 20 км/ч. Первый пришел к конечной остановке на 4 ч раньше, чем второй. Найдите расстояние между пристанью и конечной остановкой.

Постройте вспомогательную модель задачи, используя таблицу. Объясните, используя условие данной задачи, смысл следующих выражений: а) 20 · 4; б)25-20; в) (20 · 4): (25-20). Есть ли среди этих выражений решающая модель задачи? Запишите решение задачи в виде выражения и найдите его значение. Выполните проверку, решив задачу алгебраическим методом.

3. Решите следующие задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям и выполните проверку:

а) Из двух городов, расстояние между которыми 260 км, одновременно выехали два поезда в одном направлении. Скорость шедшего впереди поезда 50 км/ч, а второго - 70 км/ч. Через какое время один поезд догонит другой?

б) Из пункта А выехал автобус со скоростью 40 км/ч и через 12 мин нагнал пешехода, который вышел из пункта В одновременно с началом движения автобуса из пункта А. Скорость пешехода 5 км/ч. Какое расстояние между пунктами А и В?

в) Скорость одного конькобежца на 2 м/с больше скорости другого. Если второй начнет движение на 20 с раньше первого, то первый стартуя с того же места, что и второй, догонит его через 80 с. Определите скорости спортсменов.

3. Два самолета вылетели одновременно из одного города в два различных пункта. Кто из них долетит до места назначения быстрее, если первому из них нужно пролететь вдвое большее расстояние, но зато он летит в два раза быстрее, чем второй?

4. От двух пристаней, расстояние между которыми по реке 640 км, вышли одновременно навстречу друг другу два теплохода. Собственная скорость теплоходов одинакова. Скорость течения реки 2 км/ч. Теплоход, идущий по течению, за 9 ч проходит 198 км. Через сколько часов теплоходы встретятся?

5. Есть ли среди следующих задач задачи с недостающими или избыточными данными:

а) Турист проехал поездом и на лошади 288 км, причем на лошади он проехал 48 км. Поездом он ехал 4 ч, а на лошади - 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади, если скорость поезда 60 км/ч?

б) Турист проехал поездом и на лошади 288 км. Поездом он ехал 4 ч на лошади - 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади?

в) Турист проехал поездом и на лошади 288 км. Поездом он ехал 4 а на лошади - 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади, если поезд шел со скоростью 60 км/ч?

<u>Творческие задания</u>

1. Решите следующие задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям с пояснением:

а) На путь по течению реки моторная лодка затратила 6 ч, а на обратный путь - 10 ч. Скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч. Какова скорость течения реки?

б) Собственная скорость моторной лодки в 8 раз больше скорости течения реки. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки, если, двигаясь по течению, лодка за 4 ч проплыла 108 км.

в) На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определите собственную скорость пловца, считая ее постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 0,25 м/с.

2. Решите задачи арифметическим методом, установив предварительно, о каких процессах в них идет речь, какие величины рассматриваются и в каких зависимостях они находятся:

а) Длина прямоугольного поля 1536 м, а ширина 625 м. Один тракторист может вспахать это поле за 16 дней, а другой за 12 дней. Какую площадь вспашут оба тракториста, работая вместе в течение 5 дней?

б) В мастерской было два куска ткани: один длиной 104 м, другой -84 м. Из всей ткани сшили одинаковые платья, причем из первого куска получилось на 5 платьев больше, чем из второго. Сколько всего платьев сшили из этой ткани ?

в) Один экскаватор вынимает на 60 $м^3$ в час больше земли, чем другой. Оба экскаватора вынули вместе 10320 $м^3$ земли, причем первый работал 20 ч, а второй - 18 ч. С какой производительностью работал каждый экскаватор?

г) Два человека чистили картофель. Один очищал в минуту 2 картофелины, а второй - 3 картофелины. Вместе они очистили 400 штук. Сколько времени работал каждый, если второй проработал на 25 мин больше первого?

+д) Бассейн вмещает 2700 $м^3$ воды и наполняется тремя трубами. Первая и вторая трубы вместе могут наполнить бассейн за 12 ч, а первая и третья наполняют его вместе за 15ч. За сколько часов каждая труба в отдельности наполняет бассейн, если третья труба действует вдвое медленнее второй?

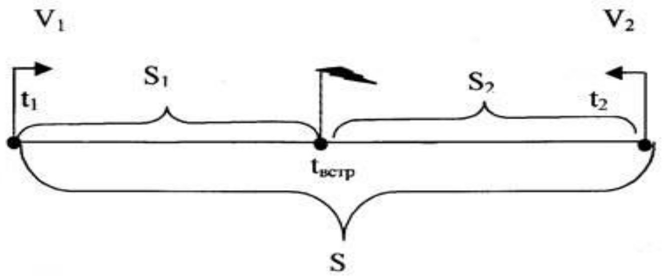
4. Тема 3.4. Решение задач на движение.

Задачи на движение, рассматриваемые в школе, включают в себя описание процесса движения одного или двух тел. Эти задачи, по существу математических зависимостей между величинами, входящими в задачу, структуре и их моделей относятся к особому виду задач. Эти задачи построены на основе функциональной зависимости между величинами: скоростью, временем и расстоянием. Методика обучения решению таких задач связана с использованием чертежа и построена на основе четких представлений о скорости равномерного движения тел и на основе понятий «двигаться навстречу друг другу, двигаться вдогонку, выехали одновременно и встретились, скорость сближения и скорость удаления и т. д.».

Л.П.Стойлова выделила основные виды задач на движение тел Стойлова Л.П. Математика. - М: Академия, 2002г. :

I. Задачи на встречное движение двух тел.

Их описание выглядит следующим образом: Пусть движение первого тела характеризуется величинами S1, v1, t1; движение второго тела характеризуется величинами S2, v2, t2. Такое движение можно представить на чертеже:



Если два тела начинают движение одновременно навстречу друг другу, то каждый затрачивает с момента выхода до встречи одинаковое время, то есть t1=t2=tвстр.

Расстояние, на которое сближаются движущиеся объекты за единицу времени, называется скоростью сближения, то есть vсбл.=v1+v2

Все расстояние, пройденное движущимися телами при встречном движении, может быть подсчитано по формуле: S=vсбл. * tсбл.

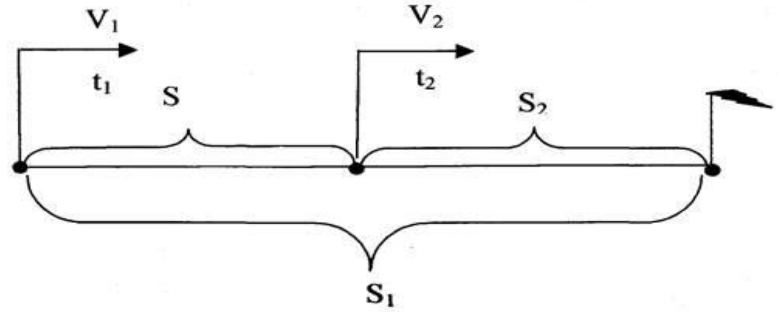
П. Задачи на движение двух тел в одном направлении.

В них следует различать два типа задач:

- 1)движение начинается одновременно из разных пунктов;
- 2)движение начинается в разное время.

Описание в общем виде: Пусть движение первого тела характеризуется величинами S1 v1 t1 а движение второго тела характеризуется величинами S2, t2, v2.

Такое движение можно представить на схематическом чертеже:



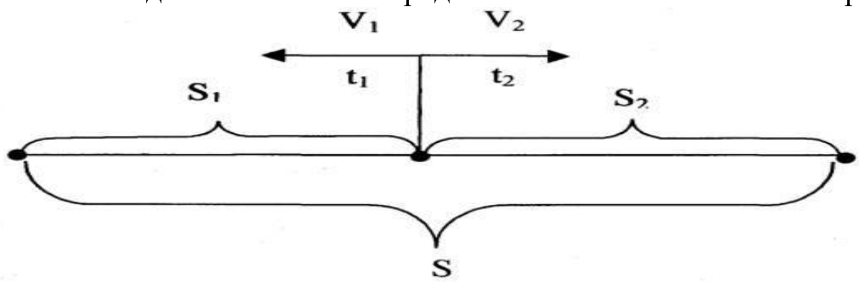
Если при движении в одном направлении первое тело догоняет второе, то v1>v2. Кроме того, за единицу времени первый объект приближается к другому на расстояние v1-v2.

Расстояние S, представляющее длину отрезка АВ, находят по формулам: S=S1-S2 и S=vсбл.*tвстр.

III. Задачи на движение двух тел в противоположных направлениях.

В таких задачах два тела могут начинать движение в противоположных направлениях из одной точки: а) одновременно; б) в разное время. А могут начинать свое движение из двух разных точек, находящихся на заданном расстоянии, и в разное время.

Такое движение можно представить на схематическом чертеже:



Общим теоретическим положением для них будет следующее: Пусть движение первого тела характеризуется величинами S1 v1 t1 а движение второго тела характеризуется величинами S2, v2, t2. Тогда: v1=v1+v2, где vi и v2 соответственно скорости первого и второго тел, а vуд - скорость удаления, то есть расстояние, на которое удаляются друг от друга движущиеся тела за единицу времени.

IV. Задачи на движение по реке.

При решении таких задач различают: собственную скорость движущегося тела, скорость течения реки, скорость движения по течению и скорость движения тела против течения.

Зависимость между ними выражается формулами:

Vпо теч.=vсоб.+vтеч.р.

Vпр.теч.=vсоб.-vтеч.р.

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели – схемы, таблицы, краткие записи и др. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной модели реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (от неё – к математической, на которой и происходит решение задачи) [2, с. 85].

Моделирование является неотъемлемой частью каждого урока математики. Применяют модель в том случае, чтобы ученикам было проще воспринимать какой-либо предмет или ситуацию, которая описана в задаче. У школьников не возникает страха самостоятельно начать анализ задачи; если что-то не получается, они используют другую модель, повторно анализируют задачу.

Модель способствует правильному ходу мыслей ребенка. При самостоятельной работе над задачей прием моделирования помогает ученику быть более активным, успешным, не боятся трудностей, которые появляются на пути. Каждый ученик имеет свою индивидуальность, поэтому именно он выбирает собственный путь рассуждения, моделирования и решения задач.

В четвёртых классах очень подробно изучаются различные виды движения двух объектов: движение в одном направлении, встречное движение, движение в противоположных направлениях. При любом подходе для лучшего понимания к изучению этого процесса используют метод моделирования, без которого нельзя освоить все тонкости математики.

Можно воспользоваться различными видами моделей при изучении процесса движения, которые рассматриваются в качестве вспомогательных моделей.

В начальной школе при решении задач на движение, в случае, когда задача решается в два и более действия эффективно применять вспомогательные модели, которые позволяют наглядно представить ситуацию, способствуют осознанному приобретению знаний, умений и навыков.

В период прохождения практики в МАОУ Лицее № 1 г. Красноярска было проведено анкетирование на учащихся 4 «В» класса в количестве 21 человек, которое направлено на определение вспомогательных моделей, используемых самими учениками при решении текстовых арифметических задач на движение. На основе результатов анкетирования были сделаны выводы о том, большинство обучающихся – 73% от числа опрашиваемых, применяют схему как основную вспомогательную модель при решении задач на движение, что составляет 19 человек.

Для эффективного решения текстовых задач целесообразней использовать различные виды вспомогательных моделей. В данном случае краткая запись неудобна в использовании, т.к. в определенных ситуациях она не дает возможности учащимся в необходимой мере представить себе жизненную ситуацию, отраженную в задаче, уяснить отношения между величинами в ней, зависимости между данным и искомым, именно поэтому этот вид модели не используется обучающимися 4 «В» класса.

Рассмотрим виды моделей, используемые при решении текстовых задач на движение более подробно.

1. Таблица

Данная математическая модель помогает упорядочить все данные в задаче для более удобного восприятия. Наиболее удачным является применение таблицы при решении задач на тройку пропорциональных величин: скорость – время – расстояние. Таблица используется, когда учащимся необходимо рассчитать по формуле скорость, время или расстояние.

	V	t	S
	?	4ч	320км
	?	3ч	120км

Рис. 1

2. Чертёж

Этот вид модели удобно применять, когда существуют удобные числовые данные в задаче, позволяющие начертить отрезок заданной длины. Ученики должны усвоить поэтапное выполнение чертежа. Представленную модель можно использовать при решении задач на движение двух объектов с небольшими числовыми или пропорциональными данными.

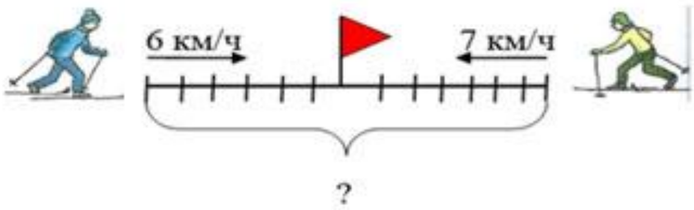


Рис.2

3. Схема

Схему используют на материале обратных задач, применяемых различными способами. Данная модель позволяет подняться на довольно высокую степень абстрактности. Схема используется при решении задач на движение двух объектов: встречное движение, движение в одном направлении, движение в противоположных направлениях, движение вдогонку.

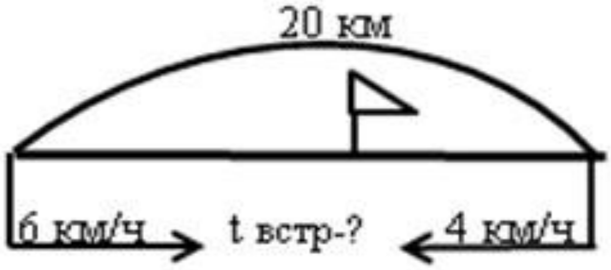


Рис.3

4. Блок-схема

Данный вид модели применяют в случаи необходимости разбора задачи аналитическим способом, начиная с вопроса. Блок-схему лучше использовать в начале урока при знакомстве с определенным видом задачи, что позволяет установить, какой вид задачи рассматривается в данный момент на уроке. При решении задач на движение эту модель не используют как вспомогательную модель к задаче [5, с. 109].

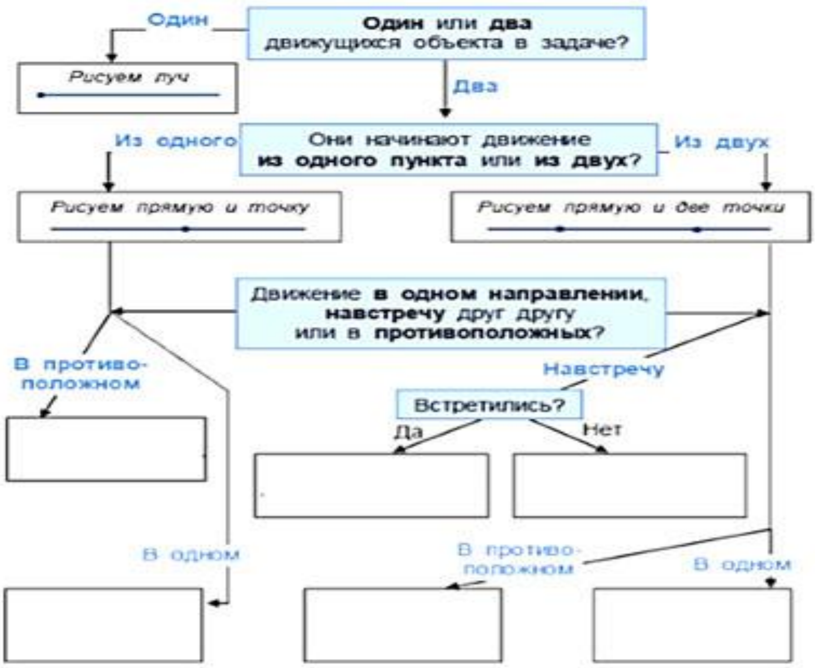


Рис.4

Чтобы свободно решать задачи, обучающийся должен освоить разные виды моделей, научиться выбирать модель, которая соответствует поставленной цели, и переходить от одной формы к другой.

Построение учащимися разных вспомогательных моделей к одной и той же задаче ведет к различному ходу рассуждений и, следовательно, разным способам решения задачи.

Из приведённых вспомогательных моделей схема является наиболее удобной при решении проблем по ряду причин:

- может быть применена при решении задач с большими числами;
- может использоваться при решении задач с буквами;
- достаточно конкретна и полностью отражает внутренние связи и количественные отношения в задаче;
- позволяет подняться на довольно высокую степень абстрактности.

Практическое занятие «Решение задач на движение».

Задания для самостоятельной работы: п. 5, упр. 4, 6, 7, 8, 9.

5. Тема 3.5. Комбинаторные задачи и их решение

Содержание

1. Комбинаторика.
2. Правила суммы и произведения.

Основная литература [2, 9-11, 32, 33, 34];

Дополнительная литература [7, 32, 45-47, 54, 55]

1. Комбинаторика

В обычной жизни нам нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор возможных вариантов или подсчитать их число. Задачи, требующие такого решения, называются *комбинаторными*. Раздел математики, в котором изучают комбинаторные задачи, называют комбинаторикой.

В начальном обучении математики роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для повседневной жизни.

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы. В связи с этим учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения комбинаторных задач. Прежде всего, он должен, решая несложные комбинаторные задачи, уметь грамотно осуществлять перебор возможных вариантов и при этом быть уверенным в том, что перебор осуществлен правильно. Учителю надо знать общие правила комбинаторики (в частности, правила суммы и произведения), некоторые виды комбинаций, число которых может быть подсчитано с помощью формул.

В обычной жизни нам нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор возможных вариантов или подсчитать их число. Задачи, требующие такого решения, называются *комбинаторными*. Раздел математики, в котором изучают комбинаторные задачи, называют комбинаторикой.

С теоретико–множественной точки зрения решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств.

Комбинаторика возникла в 16 веке и первоначально в ней рассматривались комбинаторные задачи, связанные в основном с азартными играми. В процессе изучения таких задач были выработаны некоторые походы к их решению, получены формулы для подсчета числа различных комбинаций.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математики. Ее методы широко используются для решения практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики.

В начальном обучении математики роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для повседневной жизни.

+Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы. В связи с этим учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения комбинаторных задач. Прежде всего, он должен, решая несложные комбинаторные задачи, уметь грамотно осуществлять перебор возможных вариантов и при этом быть уверенным в том, что перебор осуществлен правильно. Учителю надо знать общие правила комбинаторики (в частности, правила суммы и произведения), некоторые виды комбинаций, число которых может быть подсчитано с помощью формул.

Для освоения способов решения комбинаторных задач нужно освоить несколько этапов:

- Сначала они решаются методом перебора и для записи используются различные способы;
- Затем появляются правила суммы и произведения и процесс решения комбинаторных задач несколько формализуется;
- Дальше рассматриваются некоторые виды комбинаций, а их число подсчитывается по формуле.

2. Правила суммы и произведения

В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств называют *правилом суммы* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами (не такими, как a), то выбор «либо a, либо в» можно осуществить m + k способами.

Задача 1. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу суммы, можно осуществить 5 + 4 = 9 способами.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств называют в комбинаторике правилом произведения и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \times k$ способами.

Замечание. ***Правило суммы и произведения, сформулированные для двух объектов можно обобщить и на случай t.***

Задача 2. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать пару плодов, состоящую из яблока и апельсина?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе пары (яблоко, апельсин), то ее, согласно правилу произведения, можно выбрать 5 × 4 = 20 способами.

Задача 3. Сколько всего двузначных чисел можно составить из цифр 7, 4 и 5 при условии, что они в записи числа не повторяются?

Решение. Чтобы записать двузначное число, надо выбрать цифру десятков и цифру единиц. Согласно условию на месте десятков в записи числа может быть любая из цифр 7, 4 и 5. Другими словами, выбрать цифру десятков можно тремя способами. После того, как цифра десятков определена для выбора цифры единиц остаются две возможности, поскольку цифры в записи числа не должны повторятся. Так как любое двузначное число – это упорядоченная пара, состоящая из цифры десятков и цифры единиц, то ее выбор, согласно правилу произведения, можно осуществить $3 \times 2 = 6$ способами.

Задача 4. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4 и 5?

Решение. В данной задаче рассматриваются трехзначные числа, так как цифры в записи этих чисел могут повторяться, то цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц можно выбирать тремя способами каждую. Поскольку запись трехзначного числа представляет собой каждую. Поскольку запись трехзначного числа представляет собой упорядоченный набор из трех элементов, то, согласно правилу произведения, его выбор можно осуществить 27 способами, так как $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Задача 5. Сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3?

Решение. Запись четырехзначного числа представляет собой упорядоченный набор (кортеж) из четырех цифр. Первую цифру – цифру тысяч можно выбрать только одним способом, так как запись числа не может начинаться с нуля. Цифрой сотен может быть либо нуль, либо три, т.е. два способа выбора. Сколько же способов выбора имеется для цифры десятков и цифры единиц.

Итак, цифру тысяч можно выбрать одним способом, цифру сотен – двумя, цифру единиц двумя. Чтобы узнать сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3, согласно правилу произведения, способы выбора каждой цифры надо перемножить: $1\times 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Таким образом, имеем 8 четырехзначных чисел.

Задача 6. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

Решение. Так как запись числа не может начинаться с нуля, то цифру сотен можно выбрать пятью способами; выбор цифры десятков можно осуществить также пятью способами, поскольку цифры в записи числа не должны повторятся, а одна из шести данных цифр будет уже использована для записи сотен; после выбора двух цифр (для записи сотен и десятков) выбрать цифру единиц из данных шести можно четырьмя способами. Отсюда, по правилу произведения, получаем, что всего трехзначных чисел (из данных шести цифр) можно образовать 100: $5 \times 5 \times 4 = 100$.

Практическое занятие – «Комбинаторные задачи и их решение».

Контрольная работа.

РАЗДЕЛ 4. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОНЯТИЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА.

Тема 4.1. Из истории возникновения понятия натурального числа. Позиционные и непозиционные системы счисления.

План изучения:

1.Системы счисления.

2. История развития различных систем счисления.

3. Непозиционные и позиционные системы счисления.

Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами и цифрами: запоминает номера автобусов и телефонов, в магазине подсчитывает стоимость покупок, ведет свой семейный бюджет в рублях и копейках и т.д. Числа и цифры с нами везде! Интересно, что знал человек о числах две тысячи лет назад? А пять тысяч лет назад?

Историки доказали, что и пять тысяч лет тому назад люди могли записывать числа, могли производить над ними арифметические действия. При этом записывали они числа совершенно по другим принципам, нежели мы в настоящее время. В любом случае число изображалось с помощью одного или нескольких символов. В математике и информатике

приняты символы, участвующие в записи числа, называть цифрами.
Что же понимается под словом «число»?
Первоначально понятие отвлеченного числа отсутствовало, число было «привязано» к тем предметам, которые пересчитывали. Отвлеченное понятие натурального числа появляется вместе с развитием письменности.
Появление дробных чисел было связано с необходимостью производить измерения (сравнения с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона). Но поскольку единица измерения не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине, то возникла практическая потребность, ввести более «мелкие» числа, чем натуральные. Дальнейшее развитие понятия числа было обусловлено уже развитием математики.
Понятие числа - фундаментальное понятие, как математики, так и информатики. Под числом мы будем понимать его величину, а не его символьную запись.
Сегодня человечество для записи чисел использует в основном десятичную систему счисления. Что же такое - система счисления? Это мы узнаем в ходе изучения материала и в решении различного рода задач.

1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1.1 История возникновения различных систем счисления

Первобытному человеку считать почти не приходилось. "Один", "два" и "много" - вот все его числа. Но нам - современным людям - приходится иметь дело с числами буквально на каждом шагу. Нам нужно уметь правильно назвать и записать любое число, как бы велико оно ни было. Если бы каждое число называлось особым именем и обозначалось в письме особым знаком, то запомнить все эти слова и знаки было бы никому не под силу. Как же справиться с этой задачей? Нас выручает хорошая система обозначений.
Совокупность немногих названий и знаков, позволяющих записать любое число и дать ему имя, называется системой счисления или нумерацией.
Практически на всем земном шаре алфавитом в языке чисел служат 10 цифр, от 0 до 9. Девять из них используются для обозначения первых девяти натуральных чисел, а десятый - нуль - не обозначает никакого числа, он представляет собой так называемую "позиционную пробку". Этот язык называется десятичной системой счисления.
Однако не во все времена и не везде люди пользовались десятичной системой. С точки зрения чисто математической она не имеет специальных преимуществ перед другими системами счисления, и своим повсеместным распространением эта система обязана вовсе не общим законам математики, а причинам совсем иного характера.
В последнее время с десятичной системой серьезно конкурируют двоичная и, отчасти, троичная системы, которыми "предпочитают" пользоваться современные вычислительные машины.
Как люди считали и как называли числа до изобретения письменности, мы точно не знаем. Об этом можно только догадываться. Несомненно, одно: человечество овладевало счетом очень медленно. Однако ко времени изобретения письменности люди уже умели неплохо считать.
Четыре тысячи лет назад наиболее развитые народы (египтяне, халдеи) умели писать и пользоваться не только целыми, но и простейшими дробными числами. Более того, тогда уже существовали школы, в которых обучали искусству счета.
В первобытном письме букв не было. Каждая вещь, каждое действие изображалось картинкой. Постепенно картинки упрощались. Наряду с изображением предметов и действий появились особые фигуры, обозначающие различные свойства вещей, а так же значки для слов, соответствующих нашим предлогам и союзам.

Так возникла письменность, называемая иероглифами; при иероглифической записи каждому значку соответствует не звук, как у нас, а целое слово. Специальных знаков (цифр) для записи чисел тогда не было. Но словам "один", "два", ... "семнадцать" и так далее соответствовали определенные иероглифы. Их было не так уж много, так как больших чисел люди тогда не знали.
В некоторых странах (например, Китае и Японии) иероглифическое письмо сохранилось и до наших дней. Вот, для примера, несколько иероглифов:
У славян порядок цифр при записи числа был такой же, как в его устном названии. Мы говорим, например, "пятнадцать" (по-славянски - "пять на десять"), называя вперед цифру единиц, потом десяток. Славяне так и писали, то есть впереди писали пятерку, а за нею десяток. Наоборот, в числе "двадцать три" мы сначала называем десятки, потом единицы, у славян сначала три потом двадцать это отображалось в письме.
Чтобы отличить числа от букв, над ними ставили особый значок - титло. Оно ставилось только над одной из цифр. Место цифры, ее положение в записи числа не имело значения.
С помощью этих знаков легко записывались большие числа. Знак титло обозначал тысячи.
С помощью повторения этого знака можно было записывать очень большие числа
Числа до тысячи в Древней Руси назывались почти так же, как сейчас. Существовала небольшая разница в произношении (например, "один" называли "един" и тому подобное).
Десять тысяч называлось "тьма", и число это считалось столь огромным, что тем же словом обозначалось всякое, не поддающееся учету множество.
В более позднее время (XVI - XVII вв.) появилась своеобразная система наименования чисел, так называемое "великое славянское число", в этой системе числа до 999999 назывались почти так же, как теперь. Слово "тьма" обозначает уже миллион. Кроме того, появляются следующие названия: "тьма тем", или "легион" (то есть миллион миллионов, или триллион, равен 10); "легион легионов", или "модр" (септиллион, 10^{24}); наконец, "модр модров", или "ворон" (то есть 10^{48}).
Позиционная нумерация возникла, по - видимому, в древнем Вавилоне (примерно четыре тысячи лет назад). О ней будет сказано чуть позднее. В Индии она приняла форму позиционной десятичной нумерации с применением нуля. У индусов эту систему чисел заимствовали арабы, ставшие в VIII - IX вв. одним из самых культурных народов мира. От арабов переняли ее европейцы (отсюда название - "арабские цифры").
Особый интерес представляет вавилонская математика. Вавилонская нумерация просуществовала полторы тысячи лет (с XVIII до III в. до нашей эры) и пользовалась широким распространением на всем Ближнем Востоке. Она оказала влияние на китайскую, индийскую и греческую математику.
Вавилоняне писали палочками на пластинках из мягкой глины и обжигали потом свои "рукописи". Получались прочные кирпичные "документы", частично уцелевшие до нашего времени, их нередко находят при раскопках в Месопотамии (теперь Ирак). Поэтому изучить вавилонскую историю и математику в частности удалось довольно хорошо.
На рубеже XIX - XVIII вв. до нашей эры произошло слияние двух народов: сумерийцев и аккадян. Каждый из этих народов имели достаточно развитую торговлю, весовые и денежные единицы, однако разработанной нумерации ни один из этих народов не имел. У аккадян основная единица - "мекель" - была примерно в 60 раз меньше единицы у сумерийцев - "мины" (примерно пол килограмма). Денежной единицей служила мина серебра.
После слияния этих народов "имели хождение" обе системы единиц: минами и мекелями пользовались так, как мы теперь пользуемся килограммами и граммами (рублями и копейками) с той лишь разницей, что более крупная единица равнялась не 100, а 60 мелким единицам. Со временем появилась более крупная единица - "талант": 1 талант = 60 мин, 1 мина = 60 мекелей.
Как же вавилоняне записывали числа? Они писали палочками, вдавливая их в глину,

поэтому основными графическими элементами были у них клинья. Первый обозначал единицы, второй - десятки.
Эти знаки очень наглядны, количество клинышков бросается в глаза, так что пересчитывать их не приходится. Но клинописное письмо очень неудобно для оценки величины промежутков между числами, а необходимость переписывать все от руки приводила к частым опискам. Знак разделения был необходим, и он появился. Начиная с некоторого времени, на вавилонских кирпичиках появляется значок ^ , соответствующий нашему нулю
Однако, введя "позиционную пробку" в середине чисел, вавилоняне так и не додумались ставить ее на конце. И до самого падения вавилонской культуры числа 1, 60, 3000 записывались одинаково.
Только индусы, заимствовавшие у них позиционную нумерацию, научились правильно использовать знак нуля, и, введя вместо 60 основание 10, дали счислению его современную форму.
Три тысячи лет назад индусы уже пользовались современной нумерацией, хотя в памятниках того времени и не упоминаются числа, большие 100000. В более поздних источниках встречаются значительно большие числа - до ста квадриллионов (10^{17}). В одной из сравнительно молодых легенд о Будде говорится, что он знал названия чисел до 10^{54}. Впрочем, индусы, по - видимому, не представляли себе бесконечности натурального ряда, они полагали, что существует какое -то наибольшее число, известное только богам. Доказательство бесконечности числового ряда -- заслуга древнегреческих ученых.

1.2 Непозиционные и позиционные системы счисления

Система счисления (Нумерация) - это способ представления числа символами некоторого алфавита, которые называются цифрами.
Путем длительного развития человечество пришло к двум видам систем счисления: позиционной и не позиционной.

1.2.1 Непозиционная система счисления

В самой древней нумерации употреблялся лишь знак "|" для единицы, и каждое натуральное число записывалось повторением символа единицы столько раз, сколько единиц содержится в этом числе. Сложение в такой нумерации сводилось к приписыванию единиц, а вычитание - к их вычеркиванию. Для изображения сколько - нибуть больших чисел этот способ нумерации непригоден из - за своей громоздкости. При начальном обучении в школе, когда счет ведется в пределах одного - двух десятков, этот способ нумерации успешно применяется (счет на палочках).
В непозиционных системах счисления смысл каждого знака сохраняется и не зависит от его места в записи числа.
К более современным непозиционным системам относят египетскую иероглифическую систему нумерации, в которой имелись определенные знаки для чисел: единица - I, десять - n, сто - с и так далее; эти числа называются узловыми. Все остальные натуральные числа, называемые алгоритмическими числами, записываются единообразно при помощи единственной арифметической операции - сложения. Например ,число 243 запишется в виде сс nnnn III, 301 - в виде ссс I.
К непозиционным системам относят римскую нумерацию. За узловые числа в этой системе принимают числа: единица - I, пять - V, десять - X, пятьдесят - L, сто - С, пятьсот - D, тысяча - М. Все алгоритмические числа получаются при помощи двух арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа, например, VI - шесть (5+1= 6), ХС - девяносто(100-10=90), 1704 - МОССIV, 193 - СХСШ, 687 - DCLXXXII.
В римской нумерации заметны следы пятеричной системы счисления, так как в ней имеются специальные знаки для чисел 5, 50 и 500.

При записи чисел использовался не только принцип сложения, но и принцип умножения. Например, в старо -- китайской системе счисления числа 20 и 30 изображались схематически, как 2,10 и 3,10. числа 10, 100, 1000 имели определенные специальные обозначения. Число 528 записывалось так: 5,100,2,10,8.
Наиболее удобными среди непозиционных систем счисления являются алфавитные системы нумерации. Примерами таких систем могут служить ионийская система (Древняя Греция), славянская, еврейская, грузинская и армянская.
Во всех алфавитных системах существенным является обозначение специальными символами - буквами в алфавитном порядке всех чисел от 1 до 9, всех десятков от 10 до 90 и всех сотен от 100 до 900. Чтобы отличать запись чисел от слов над буквами, обозначающими цифры, в греческой и славянской нумерации ставилась черта.
В греческой системе счисления число 543 записывалось: цмг (ц - 500, м- 40, г- 3). В римской системе счисления это число записывается в виде DXLIII, в египетской иероглифической - в виде ccccc nnn III.
Из этого примера видно преимущество алфавитной нумерации, в которой используется цифровой принцип обозначения единиц, десятков, сотен.
В записи больших чисел в алфавитной системе уже виден переход к позиционной системе записи. Например, 32543 записывалось так
Наиболее удобными системами счисления оказались позиционные или поместные системы.

Позиционные системы счисления.

Позиционная система счисления - это совокупность определений и правил, позволяющих записывать любое натуральное число с помощью некоторых значков или символов, каждый из которых имеет определенный смысл в зависимости от его места в записи числа (от его позиции). Чаще всего применяют позиционную систему счисления с фиксированным основанием. Основанием системы может быть любое натуральное число с, с>1.
Систематической записью натурального числа N по основанию с называют представление этого числа в виде суммы:
$N = a_n c^n + ... + a_1 c, + a_0$, где a_n, ..., a_1, a_0 - числа принимающие значения 0, 1, ..., с - 1, причем, a_n?0.
Позиционная система счисления с основанием с называется с -- ичной (двоичной, троичной и так далее). На практике чаще всего применяется десятичная с= 10).
Для обозначения чисел 0, 1, ..., с - 1 в с - ичной системе счисления используют особые знаки, называемые цифрами. Древнеиндийские математики открыли нуль - особый знак, который должен был показать отсутствие единиц определенного разряда.
Для с - ичной системы счисления нужно с цифр. Если с < 10, то применяются те же обозначения цифр, что и в десятичной системе счисления (только берутся цифры, меньше основания системы).
В системах с основанием с > 10 для чисел, больших или равных 10, не вводят специальных символов, а используют десятичную запись этих чисел, заключая эту запись в скобки. Например, в четырнадцатеричной системе имеется четырнадцать цифр: 0, 1, 2, 3 ... 9, (10), (11), (12), (13).

В системе счисления с основанием с, так же как и в десятичной системе счисления, место, занимаемое цифрой, считая, справа налево, называется разрядом.
Число $N= a_n c^n + ... + a_1 c + a_0$ содержит a_0 единиц первого разряда, a_1 единиц второго разряда, a_2 единиц третьего разряда и так далее. Единица следующего разряда в с раз больше единицы предыдущего разряда.
Позиционные системы счисления удовлетворяют требованию возможности и однозначности записи любого натурального числа.
Теорема. Любое натуральное число N может быть записано в системе с основание с и притом единственным образом.

Задания для самостоятельной работы- гл. 13, 17, рефераты, доклады, презентации.

Раздел 5. Величины и их измерения.

5.1. Понятие величины и её измерения. Из истории создания систем единиц величин.

В древние времена, на заре становления государств и торговых отношений между людьми, возникала необходимость точно отмерять различные товары. Например, как отмерить веревку? Отвесить шелк, золото или соль? Как сказать какое расстояние до соседнего племени или клана? Так же было важно правильно вымерять площадь засева, чтобы не засеять больше зерна или наоборот слишком мало.

В связи с этим, люди начали вводить какие - то величины, которые приблизительно были равны во всех кланах, общинах, государствах. И так повелось, что практически все народы сравнивали величины с человеком или животными. Вес измеряли тоже в сравнении. Обычно это было сравнение с плодами деревьев. Например, название карат пришло к нам от названия дерева Акация Кара. Вес одного зерна этого дерева равен 1 карату. Эта единица жива по сей день и равна 1/5 грамма или 200 миллиграмм. Ну а время сравнивали, конечно, с земными сутками (сменой времен года, цветением различных растений).

На Руси расстояния измеряли локтями. Причем был обычный локоть а был царский локоть. Обычный локоть это расстояние от кончика локтевого сустава до конца среднего пальца при вытянутой руке. Царский локоть отличался от обычного не на много. Просто царю измеряли локоть и брали эту величину за эталон. Большие расстояния мерили "петушиными криками" т. е. расстояние, на которое слышен петушиный крик. Еще пользовались величиной равной лошадиному циклу. Т.е. это расстояние, которое лошадь может пройти (пробежать) без остановки на отдых.

Наверное, у Вас возникнет резонный вопрос. Если я торгую веревкой, значит мне выгодно будет поставить продавцом не высокого человека у которого соответственно будет локоть короче средних размеров. Так, где же точность в таких измерениях?

Возникла резонная необходимость точных измерений. В разные времена пытались ввести и со временем уточнить различные величины. Так, в 1736 г. российский Сенат образовал комиссию мер и весов, в состав которой входили выдающиеся ученые - Л. Эйлер, А.К. Нартов и др. Комиссии предписывалось разработать эталонные меры, определить отношения различных мер между собой, выработать проект Указа по организации в России поверочного дела. Все это требовало больших средств и усилий, которых в то время в России не было. Однако, спустя почти 60 лет, близкие принципы были сформулированы и реализованы во Франции, в виде метрической системы мер. Перспективность внедрения метрической системы мер оценил Д.И. Менделеев, призвавший на первом съезде русских естествоиспытателей в 1867 г., облегчить "…возможность всеобщего распространения метрической системы и через то посодействовать общей пользе и будущему желанному сближению народов". По его инициативе Петербургская академия наук предложила учредить международную организацию, которая имела бы эталоны метрической системы мер, обеспечивая единообразие измерений в международном масштабе.

Метрическая система - это общее название международной десятичной системы единиц, основными единицами которой являются метр, килограмм и секунда. При некоторых различиях в деталях элементы системы одинаковы во всем мире.

1. Единица длины - метр

В Древней Руси в качестве единиц измерения длины применялись: косая сажень (248 см) - расстояние от пальцев левой ноги до конца пальцев поднятой правой руки, маховая сажень (176 см) - расстояние между концами пальцев расставленных в стороны рук, локоть (45 см) - расстояние от концов пальцев до локтя согнутой руки. Первые единицы длины, как в России, так и в других странах были связаны с размерами частей тела человека. В Англии и США до сих пор используется "ступня" - фут (31 см), "большой палец" - дюйм (25 мм) и даже ярд (91 см) - единица длины, появившаяся почти 900 лет назад. Она была равна расстоянию от кончика носа короля Генриха I до конца пальцев его вытянутой руки.

Согласно первому определению, принятому во Франции в 1791, метр был равен 1Ч10-7части четверти длины парижского меридиана. Размер метра был определён на основе геодезических и астрономических измерений Ж. Деламбра и П. Мешена. Первый эталон метра был изготовлен французским мастером Ленуаром под руководством Ж. Борда (1799) в виде концевой меры длины - платиновой линейки шириной около 25 мм, толщиной около 4 мм, с расстоянием между концами, равным принятой единице длины. Он получил наименование "метр архива" или "архивный метр" (по месту хранения). Однако, как оказалось, определённый таким образом метр не мог быть вновь точно воспроизведён из-за отсутствия точных данных о фигуре Земли и значительных погрешностей геодезических измерений.

В 1872 Международная метрическая комиссия приняла решение об отказе от "естественных" эталонов длины и о принятии архивного метра в качестве исходной меры длины. По нему был изготовлен 31 эталон в виде штриховой меры длины - бруса из сплава Pt (90%) - lr (10%). Поперечное сечение эталона имеет форму X, придающую ему необходимую прочность на изгиб. Вблизи концов нейтральной плоскости эталона нанесено по 3 штриха. Расстояние между осями средних штрихов определяет при 0°C длину метра. Эталон № 6 оказался в пределах погрешности измерений равным архивному метру. Постановлением 1-й Генеральной конференции по мерам и весам этот эталон, был принят в качестве международного прототипа метра.

Прототип метра и две его контрольные копии хранятся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов. Во Всесоюзном научно-исследовательском институте им. Д.И. Менделеева (ВНИИМ) в Санкт - Петербурге хранятся две копии (№ 11 и 28) Международного прототипа метра. При введении метрической системы мер в СССР (1918) государственным эталоном метра была признана копия № 28. Международный прототип метра, погрешность которого $1Ч10^{-7}$, и национальный прототипы обеспечивали поддержание единства и точности измерений на необходимом для науки и техники уровне в течение десятков лет. мера эталонный метрический килограмм

Однако рост требований к точности линейных измерений и необходимость создания воспроизводимого эталона метра стимулировали исследования по определению метра через длину световой волны. 11-я Генеральная конференция по мерам и весам (1960) приняла новое определение метра, положенное в основу Международной системы единиц (СИ): "метр - длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями 2p10 и 5d5 атома криптона 86". Измерение длины прототипа № 28 на эталонном интерферометре показало, что он больше метра (по определению 1960) на 0,22 мкм.

2. Единица массы - килограмм

В XVIII веке при создании метрической системы мер килограмм был определён как масса 1 дмі воды при 4°C (при этой температуре у воды наибольшая плотность). В 1799 году был изготовлен прототип килограмма в виде платиновой гири, однако его масса была на 0,028 г больше массы 1 дмі воды.

Нынешний эталон был изготовлен в 1889 году из платиново-иридиевого сплава в виде цилиндра высотой и диаметром 39 мм. С тех пор он хранится в Международном бюро мер и весов под тремя герметичными стеклянными колпаками. Были изготовлены также точные официальные копии международного эталона, которые используются как национальные эталоны килограмма. Всего было создано более 80 копий. Две копии международного эталона были переданы России, они хранятся во ВНИИ метрологии им. Менделеева. Примерно раз в 10 лет национальные эталоны сравниваются с международным. Эти сравнения показывают, что точность национальных эталонов составляет примерно 2 мкг. Так как они хранятся в тех же условиях, нет никаких оснований считать, что международный эталон точнее. По разным причинам за сто лет международный эталон теряет $3 \cdot 10^{?8}$ своей массы. Однако, по определению, масса международного эталона всегда в точности равна одному килограмму. Поэтому любые изменения действительной массы эталона приводят к изменению величины килограмма.

3. Единица времени - секунда

Первым прибором для измерения времени были примитивные солнечные часы в виде воткнутого в землю шеста. Затем их стали изготавливать из камня или дерева, устанавливать на стенах общественных зданий. Появились также и переносные солнечные часы - из ценных пород дерева, слоновой кости или бронзы.

Солнечные часы могли функционировать лишь в ясную погоду; неудивительно, что был изобретён аналог: водяные часы. Они служили людям много сотен лет. Их наименование, "клепсидры", происходит от греческих слов klepto (брать) и idor (вода). Но изобрели эти часы не в Греции: они были известны уже египтянам; в Китае ими также пользовались, причём уже 4,5 тысячи лет назад.

Кроме водяных часов, в древности были известны также часы песочные и огневые. Песочные часы появились не раньше, чем прозрачное стекло. Одно из самых ранних упоминаний о них в Западной Европе - это обнаруженное в Париже сообщение от 1339 года. Недостаток песочных часов был в том, что при длительном использовании они теряли точность, так как песчинки постепенно измельчались, а отверстие в середине, наоборот, постепенно увеличивалось от истирания, и поток песка становился больше.

Огневые часы на Востоке представляли собой сделанные из медленно горящего состава шнуры или палочки. А с начала XIII века появилась и их вариация в виде тонких свечей длиной около метра, со шкалой, нанесённой по всей длине. Эти часы довольно точно показывали время, а также освещали ночью жилища знати. Огневые часы могли выполнять и роль будильника: прикреплённые к боковым сторонам свечи металлические штырьки по мере таяния воска падали, ударяя по металлической чашке.

С 1600-х годов в Европе было принято делить день на 24 часа, которые подразделялись на 60 минут каждый. Около 1680 года лондонский часовщик Уильям Клемент начал делать напольные часы, которые были достаточно точны, чтобы надёжно измерять секунды как 60-е доли минуты. Эти часы использовали анкерный спусковой механизм с секундным маятником для показа секунд на отдельном маленьком циферблате. Такой механизм требовал меньше энергии, испытывал меньшее трение и был более точным по сравнению со штыревым спусковым механизмом. В течение нескольких лет все основные производители часов Великобритании добавили в свои механизмы секундные стрелки.

Сначала секунду определяли как 1/86400 средних солнечных суток, так как уже в древности было известно, что длительность истинных солнечных суток колеблется в течение года. Астрономические наблюдения XIX и XX столетия показали, однако, что вращение Земли замедляется, а также подвержено нерегулярным скачкам, так что в 1956 году в качестве нового определения секунды была принята секунда эфемеридного времени, определение которой звучало как "1/31 556 925,9747 доля тропического года для 0 января 1900 в 12 часов эфемеридного времени". При этом для определения секунды становились фундаментальными таблицы движения Солнца и планет Ньюкомба, на основании которых определялось эфемеридное время.

Часы, минуты и секунды прочно вошли в наш обиход, стали естественно восприниматься даже на фоне десятичной системы счисления. Сейчас именно эти единицы (в первую очередь секунда) являются основными для измерения промежутков времени.

Заключение

По традиции и в настоящее время иногда пользуются старыми единицами. Моряки расстояния измеряют милями (1852 м) и кабельтовыми (десятая часть мили, то есть около 185 м), скорость - узлами (1 миля в час). Массу алмазов - измеряют в каратах (200 мг). Объём нефти измеряют в баррелях (159 л) и т.д.

Старинные русские названия мер длины и мер массы остались жить в пословицах, поговорках и образных выражениях: "ни пяди земли", "мерить на свой аршин", "косая сажень в плечах"; "съесть пуд соли"; "фунт лиха"; "ты от дела на пяденьку, а оно от тебя на саженьку", "мал золотник, да дорог"

РАЗДЕЛ 6. Из истории развития геометрии. Свойства геометрических фигур.

План изучения:

1. Свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве.
2. Из истории развития геометрии.

Тема 6.1. Свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

Опр. 1. Геометрической фигурой Ф называется всякое непустое множество точек.

Если все точки геометрической фигуры принадлежат одной плоскости, то она называется плоской.

Рассмотрим определения некоторых плоских фигур.

Опр. 2. Лучом называется множество точек прямой, лежащих по одну сторону от некоторой точки этой прямой.

Опр. 3. Угол – это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

Лучи наз. сторонами угла, а их общее начало – его вершиной.

Обозначают угол: $\angle A$, $\angle(k,l)$, $\angle ABC$.

Опр. 4. *Треугольником* называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

Треугольник называется *равнобедренным,* если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми, а третья сторона называется основанием треугольника.

Опр. 5. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, причем никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки - его сторонами.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Из множества параллелограммов выделяют прямоугольники и ромбы.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые (определение из курса математики начальной школы).

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

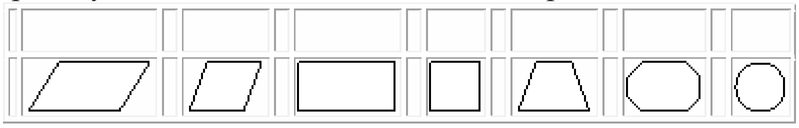
Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми.

Многоугольником называется замкнутая ломаная, если ее звенья не лежат на одной прямой.

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром.



Всякая конечная замкнутая область трехмерного пространства называется **телом.**

Примерами тел могут служить пространственные фигуры.

Многогранник - это ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждого из ограничивающих его многоугольников. Многоугольник на поверхности многогранника называется его *гранью.* Стороны граней называются *ребрами* многогранника, а вершины граней - *вершинами многогранника.*

Простейшие многогранники - это призма и пирамида.

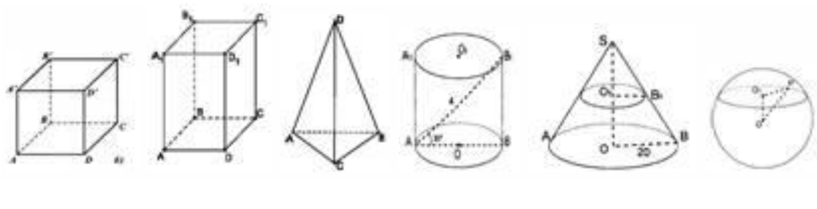
Призмой называется многогранник, у которого две грани, называемые основаниями призмы, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани - параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Призма называется ***прямой,*** если ее боковые ребра перпендикулярны основанию. Прямая призма называется ***правильной,*** если ее основанием является правильный многоугольник.

Призма, у которой основание- параллелограмм, называется ***параллелепипедом.***

Параллелепипед называется ***прямоугольным,*** если все его грани - прямоугольники.

Куб - это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, т.е. все грани которого - квадраты.



Тема 6.2. Из истории развития геометрии.

Геометрия - одна из самых древних наук. Возникла геометрия в Египте более 4000 лет назад. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» - по-гречески земля, а «метрео» -мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений: людям нужно было определять расстояние между точками, площади участков и объемы тел (употребляемых, например, при постройке жилищ). Потребности жизни заставляли находить людей способы измерения площадей и объемов в разных странах и в разное время. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития служила преимущественно практическим целям. Это отразилось и в названиях многих геометрических фигур. Например, название фигуры трапеция происходит от греческого слова trapezion - «столик», от которого произошло также слово «трапеза» и другие родственные слова. Термин «линия» возник от латинского linum - «лён, льняная нить». В дальнейшем геометрия сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

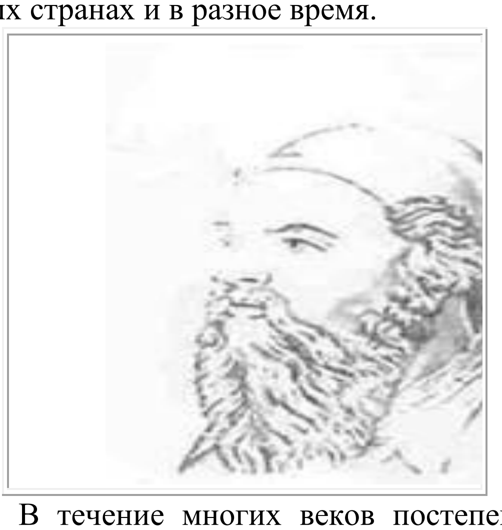
Первые геометрические факты мы находим в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах (III тысячелетие до н.э.), а также в других источниках. Слово геометрия греческого происхождения. В буквальном смысле оно означает «землемерие». Оно составлено из двух древнегреческих слов ge -«Земля» и metreo- «измеряю».

Возникла геометрия в Египте более 4000 лет назад. Вот что пишет о зарождении геометрии греческий историк Геродот, живший около 2500 лет назад: «Сезострит, египетский царь, произвел деление земель, отмерив каждому египтянину, участок по жребию, сообразно этим участкам с их владельцев ежегодно взимал налоги.

Если Нил заливал чей-нибудь участок, то пострадавший обращался к царю и докладывал о случившимся. Тогда царь посылал землемеров (геометров), они измеряли, на сколько уменьшился участок и сообразно этому понижали налог. Вот откуда пришла геометрия и перешла из этой страны в Грецию».

Об этом же пишет и другой греческий ученый Евцем Родовский (4в до н.э.): «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлива реки Нил, постоянно смывавшего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное».

Нельзя думать, что не будь Нила с его мощными разливами – не было бы геометрии. Людям нужно было определять расстояние между точками, площади участков и объемы тел (употребляемых, например, при постройке жилищ) и они создали бы геометрию не в Египте, так в Индии, не и Индии, так в Китае. Да оно так и было. Потребности жизни заставляли находить людей способы измерения площадей и объемов в разных странах и в разное время.



В течение многих веков постепенно накапливали древние египтяне различные научные знания, в том числе знания по геометрии. Они сумели довольно точно определять площади фигур, объемы некоторых тел, решать некоторые другие геометрические задачи.

Но геометрии, как науки, у них не было. У них было много различных правил - рецептов, не соединенных между собой общей идеей, не приведенных в единую стройную систему. Этими рецептами владели чаще всего жрецы храмов, которые держали их в секрете.

Цари древнего Египта постоянно вели долгие изнурительные войны, которые ослабляли экономическую мощь страны. Были периоды, когда Египет завоевывался разными другими народами – это были периоды жестокой эксплуатации страны – наука и искусство пришли в упадок.

Но к северу от Египта, уже зародилось новое государство – Греция. Греческие купцы посещали Египет и, возвращаясь, много рассказывали об этой чудесной стране. Вместе с купцами Египет стали посещать ученые. И достижения египетской науки постепенно стали известны древним грекам.

Но Греки не просто усвоили достижения египтян. Они исправили их ошибки и развивали геометрию дальше. Именно в древней Греции около 2500 лет назад геометрия стала математической наукой.

В VII веке до н.э. центром математического творчества становится так называемая пифагорейская школа в южной Италии. Здесь были открыты несоизмеримые отрезки, создано учение о подобии, найдены способы построения некоторых правильных многоугольников и многогранников, доказана теорема Пифагора и т.д.

К 300-м годам до н.э. геометрия становится самостоятельной математической наукой. К этому времени древнегреческий ученый Евклид (III в. до н.э.) написал книгу, называемую им «Начала», написание которой относится к 325-300 годам до н.э.

Евклид собрал почти все, что было создано до него, по геометрии и привел в стройную единую систему. Он взял за основу некоторые положения, так называемые аксиомы (постулаты), и из них путем последовательных рассуждений сумел вывести все теоремы геометрии. Т.о., в этой книге Евклид подытожил накопленные к тому времени геометрические знания и попытался дать законченное аксиоматическое изложение этой науки. «Начала» Евклида более полутора тысяч лет переписывались от руки в Греции, Италии, Египте, Индии, Средней Азии и других странах. С возникновением книгопечатания «Начала» сотни раз перепечатывались на всех языках мира. Это одна из наиболее распространенных на земном шаре книг. Написана она была настолько хорошо, что в течение 2000 лет всюду преподавание геометрии велось либо по переводам, либо по незначительным переработкам книги Евклида. Например, таким пособием был учебник А.П. Киселева, по которому советская школа работала до середины XX столетия.

Продуманное и глубоко логическое изложение геометрии, данное в книге Евклида, привело к тому, что математики не мыслили возможности существования геометрии, отличной от евклидовой. Немецкий философ-идеалист XVIII в. И. Кант и многие его последователи считали, что понятия и идеи евклидовой геометрии (единственно возможной, чуть ли не божественной) были заложены в человеческое сознание еще до того, как человек научился что-либо осознавать.

Ученые, жившие после Евклида добавили к «Началам» несколько новых теорем, кое-что изменили, но основная масса материала, границы, определяющие ее объем и метод остались прежними. Поэтому геометрия, которую мы изучаем, называется Евклидовой.

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287 -212 гг. до н. э.), Апполоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие учёные.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя – в XVII в. н. э. – и были связаны с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Французский математик и философ Р. Декарт (1596 – 1650) предложил новый подход к решению геометрических задач: ввёл метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

На Руси самое древнее сочинение по арифметике, сохранившееся до нас, написано в 1196 году новгородским монахом Кириком. Самое древнее сочинение, сохранившееся до наших дней и содержащее геометрические сведения, написано в начале XVII века (вероятно, в 1607 году), оно называлось «Устав ратных дел». В этом сочинении содержатся правила (рецепты) для решения задач на определение расстояния до предметов. Никаких теорем или доказательств верности не приводится.

В других рукописях («Книга и письма» и другие) даются правила изменения площадей, нахождения расстояний, определение объемов тел. В этих правилах много ошибок и совсем не приводится доказательств.

Распространению на Руси геометрических знаний препятствовала церковь. Попы боялись, что вместе с книгами с запада в Россию будет проникать католическая религия, поэтому вводили жестокие меры против тех, кто занимался математикой. В одном древнерусском поучении говорится: «богомерзостен перед богом всякий, кто любит геометрию».

В течение XVII века геометрические знания на Руси распространялись медленно.

В XVIII веке геометрия получила большое распространение. В России была открыты Академия наук, в Москве был открыт университет, во многих городах открывались школы и гимназии, появились учебники геометрии, как отечественные, так и переводные.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказательства пятого постулата Евклида («И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»), который из-за сложности формулировки обычно заменяют аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Н. И. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного, но не получил при этом противоречивых утверждений. В 1826 г. он сообщил об открытии новой геометрии, отличной от геометрии Евклида. Такая геометрия получила название геометрии Лобачевского. К аналогичным выводам пришёл венгерский математик Я. Бойяи и немецкий математик К. Ф. Гаусс.

Открытие новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас мира может быть только евклидова геометрия. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближённо, хотя и с большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826 – 1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

В настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо её значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науке и техники и, конечно же, в самой математике.

Литература:

1. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2002.

2. Готман Э. Г., Скопец З. А. Задача одна – решения разные: Геометрические задачи. – М.: Просвещение, 2000.

3. Фоминых Ю. Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7-9 классов. – М.: Просвещение, 1999.

4. Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7 – 11 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2000.

5. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия, 7 – 9: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2002.

6. Энциклопедический словарь юного математика./Составитель Савин А.П. – М.: Педагогика, 1989.

РАЗДЕЛ 7. ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Числа точные и приближенные

Числа, с которыми мы встречаемся на практике, бывают двух родов. Одни имеют точное значение величины, другие – только приблизительное. Чаще всего удобно пользоваться приближенным числом вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно.

Так, если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 – точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 км, то здесь число 960 – приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.

Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Теория приближенных вычислений позволяет:

1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов;

2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата;

3) рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точность результата.

Приближенные вычисления

Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, семизначная таблица логарифмов при вычислениях с числами, имеющими 5 значащих цифр – избыточна). Твёрдое знакомство с правилами приближенных вычислений необходимо каждому, кому приходится вычислять.

Действия над приближенными числами

Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

2. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

3. Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.

4. Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Предельная абсолютная погрешность заведомо превосходит абсолютную величину истинной погрешности, поскольку предельное значение вычисляется в предположения, что различные погрешности усиливают друг друга; практически это бывает редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр.

При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример. Найти сумму приближенных чисел 127,42; 67,3; 0,12 и 3,03.

Решение. 127,42+67,3+0,12+3,03=197,87=197,9.

Пример. Найти разность чисел: 418,7 – 39,832

Решение. 418,7 – 39,832=378,87=378,9.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

Пример. Умножить приближенные числа 3,4 и 12,32.

Решение. 3,4×12,32=41,8888=42.

Пример. Площадь прямоугольной грядки приближенно равна 7,6 $м^2$, ширина 2,38 *м*. Чему равна ее длина?

Решение. Длина грядки равна частному от деления 7,6 на 2,38.

Действие деления выполняют так: 7,6:2,38 *м*=3,19 *м*=3,2 *м*.

Последнюю цифру частного 9 можно было и не писать, а, получив в частном две значащие цифры, заметив, что остаток больший половины делителя, округлить частное с избытком.

3. При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).

Примеры.

$2,3^2 = 5,29 = 5,3$;

$0,8^3 = 0,512 = 0,5$.

4. При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).

5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта (запасная) цифра отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

Применение правил

Применение вычислений способом подсчета цифр рассмотрим на примере.

Пример. Найти значение $x = \frac{(a-b)c}{a+b}$, если a = 9,31; b = 3,1; c = 2,33.

Решение (подчёркнуты запасные цифры). $a - b = 9{,}31 - 3{,}1 = 6{,}2\underline{1}$;

$(a - b)\,c = 6{,}2\underline{1}\times 2{,}33 = 14{,}\underline{5}$;

$a + b = 9{,}31 + 3{,}1 = 12{,}4\underline{1}$;

$x = 14{,}\underline{5} : 12{,}4\underline{1} = 1{,}1\underline{7}$.

Ответ. $x = 1{,}2$.

Примечание. Сформулированные выше правила подсчета цифр имеют вероятностный смысл: они наиболее вероятны, хотя существуют примеры, не удовлетворяющие этим правилам. Поэтому вычисления способом подсчета цифр – самый грубый способ оценки погрешности результатов действий. Однако он очень прост и удобен, а точность таких вычислений вполне достаточна для большинства технических расчётов. Поэтому этот способ широко распространен в вычислительной практике.

В более ответственных вычислениях пользуются способом границ или способом граничных погрешностей.

Наилучшим в смысле строгости из известных способов приближенных вычислений является способ границ.

Пользуясь этим способом, по известным нижним и верхним границам данных чисел, находят отдельно нижнюю и верхнюю границы результата.

Пусть, например, надо сложить два числа: $x = (3{,}2 \pm 0{,}05)$ и $y = (7{,}9 \pm 0{,}05)$.

Имеем: $3{,}15 < x < 3{,}25$, $7{,}85 < y < 7{,}95$, откуда $11{,}00 < x + y < 11{,}20$.

Итак, $x + y = (11{,}1 \pm 0{,}1)$.

Вообще, нижняя граница суммы приближенных чисел равна сумме нижних границ слагаемых, а верхняя – сумме верхних границ слагаемых.

Из определения НГ и ВГ вытекают также следующие правила:

1) округлять НГ можно только по недостатку, а ВГ – по избытку;

2) чем меньше разность ВГ x – НГ x, тем точнее определяется x;

3) в качестве приближенного значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел НГ x и ВГ x или число, близкое к нему.

Одним из источников получения приближенных чисел является округление. Округляют как приближенные, так и точные числа.

Округлением данного числа до некоторого его разряда называют замену его новым числом, которое получается из данного путем отбрасывания всех его цифр, записанных правее цифры этого разряда, или путем замены их нулями. Эти нули обычно подчеркивают или пишут их меньшими.

Однако более удобным является кратное представление чисел: Например, если требуется округлить число 58452 до трёх значащих цифр, результат можно представить в виде: 585<u>00</u> или 58500. Однако удобнее записать $585\cdot10^2$ или $58{,}5\cdot10^3$ и т.д.

Для обеспечения наибольшей близости округленного числа к округляемому следует пользоваться такими правилами: чтобы округлить число до единицы определенного разряда, надо отбросить все цифры, стоящие после цифры этого разряда, а в целом числе заменить их нулями. При этом учитывают следующее:

1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с недостатком);

2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с избытком).

Покажем это на примерах. Округлить:

а) до десятых 12,34; Ответ: 12,3

б) до сотых 3,2465; 1038,785; Ответы: 3,25; 1038,79

в) до тысячных 3,4335; Ответ: 3,434

г) до тысяч 12375; 320729. Ответы: $12 \cdot 10^3$; $32{,}1 \cdot 10^4$

Примечание.

Еще несколько лет назад в случае отбрасывания одной лишь цифры 5 пользовались «правилом чётной цифры»: последнюю цифру оставляли без изменения, если она чётная, и увеличивали на единицу, если нечетная. Теперь же «правила чётной цифры» не придерживаются: если отбрасывают одну цифру 5, то к последней оставленной цифре прибавляют единицу независимо от того, четная она или нечетная.

РАЗДЕЛ 8. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Статистикой называется наука о сборе, классификации, обработке и анализе всевозможных качественных и количественных данных, о получении фактов из обобщающих выводов. Одна из задач статистики – сделать имеющуюся информацию наглядной. Здесь помощь оказывают как математические приёмы, так и диаграммы, таблицы, графики.

Например, если вы изучаете данные о заболеваемости 1000 человек, то статистика рекомендует разбить эту тысячу на возрастные группы: 100 человек моложе 20 лет, 170 – в возрасте от 20 до 25 лет и т.д. По этим данным можно составить таблицу, а по таблице построить гистограмму возраста и график заболеваемости.

В настоящее время использование ЭВМ значительно облегчает составление отчётов, построение таблиц, графиков и других документов. Но применение специальных компьютерных программ мало помогает при выборе методов обработки и анализе результатов. Здесь исследователям помогает изучение методов, разработанных статистикой как наукой.

В статистике применяют два основных подхода: метод сплошных наблюдений (описательная статистика) и выборочный метод. Метод сплошных наблюдений предполагает изучение всех элементов совокупности. Он применяется, если надо изучить успеваемость в группе или на факультете, работу предприятия и его филиалов и т.д., когда количество изучаемых объектов не слишком велико. Когда количество объектов велико или сплошное обследование невозможно в силу того, что обследование может привести к уничтожению объекта (например, чтобы узнать качество консервов, банку надо вскрыть), то есть когда не хотят проводить полное обследование объекта, пользуются выборочным методом, при котором из общей совокупности выбирают ограниченное число объектов и их подвергают изучению.

Тогда возникает вопрос, насколько результаты такого обследования будут справедливы для всей совокупности. Разрешить этот вопрос помогает математическая статистика.

Математическая статистика – раздел математики, посвящённый математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Историческая справка.

Математическая статистика возникла в XVII веке и создавалась параллельно с теорией вероятностей. В России методы математической статистики применялись к демографии и страховому делу В.Я. Буняковским ещё в середине прошлого века. В СССР значительные результаты в области математической статистики получены В.И. Романовским, А.Н. Колмогоровым, Е.Е. Слуцким, Н.В. Смирновым, Ю.В. Линником. Большой вклад в математическую статистику внесли английские (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон), а также и американские (Ю. Нейман, А. Вальд) учёные.

Решающее значение для математической статистики имели работы русской классической школы теории вероятностей 2-й половины XIX – начала XX века (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн) и работы немецких и английских математиков (К.Ф. Гаусс, К. Пирсон, Ф. Гальтон). Нельзя не отметить вклад советских математиков в составление таблиц функций (Е.Е. Слуцкий, Н.В. Смирнов, Л.Н. Большев).

Математическая статистика для решения своих задач активно привлекает теорию вероятностей. Но, в отличие от теории вероятностей, которая занимается исчислением вероятностей, когда из каких-либо соображений распределение вероятностей известно, статистика решает обратную задачу: отыскивание вероятностных характеристик случайных величин по наблюдаемым реализациям и частотам их появления. Ответ на поставленный выше вопрос о том, насколько результаты выборочного обследования будут справедливы для всей совокупности, математическая статистика формулирует в вероятностных терминах, вводя понятие «уровень доверия» – вероятность, с которой мы не ошибёмся, если поверим выводам, сделанным на основе анализа выборки. Применение вероятностного подхода к изучению выборки очень естественно: данные выборки, не охватывая всей совокупности целиком, являются случайными значениями. По результатам эксперимента необходимо сделать вывод о некотором признаке объекта, когда закон распределения получаемой в результате эксперимента случайной величины (или его параметры), вообще говоря, неизвестен, а эксперимент проводится именно для получения информации о законе распределения случайной величины (что и позволяет сделать вывод о признаке объекта).

В вероятностных терминах эксперимент состоит в проведении n независимых испытаний над некоторой случайной величиной; по результатам испытаний надо сделать вывод относительно параметров распределения этой случайной величины (или связанной с ней). При этом изучаемый признак объекта может быть как количественным, так и качественным. Например, если объект – это совокупность всех выпущенных ампул с новокаином, то количественным признаком может быть завод изготовитель, а качественным – бездефектность. На языке теории вероятностей: завод изготовитель – непрерывная случайная величина (случайная величина, возможные значения которой заполняют некоторый интервал), бездефектность – дискретная (случайная величина, принимающая конечное или счётное число значений). В частности, бездефектность – случайная величина, принимающая значение 1 для ампул без дефекта и 0 – для ампул с дефектом. С помощью эксперимента получаются данные о распределении вероятностей случайной величины – например, о проценте бракованных ампул в партии. Методы математической статистики используются как при исследовании непрерывных случайных величин, так и при вычислении их вероятностей.

Выборочный метод.

Совокупность всех исследуемых объектов называется генеральной совокупностью. Выборкой называется отобранное некоторым образом из генеральной совокупности число объектов необходимых для исследования и соответствующих определённым признакам. Количество объектов называется объёмом выборки.

Например, если из 1000 студентов для контрольной флюорографии отобрано 100, то все студенты – это генеральная совокупность и её объём равен 1000, а отобранные – это выборка с объёмом равным 100.

Разность между наибольшим и наименьшим значением числовой выборки называется размахом выборки. Для исследования все данные числовой выборки систематизируются от min до max значения. После этого выборка представляет собой неубывающую последовательность чисел, которая называется вариационным рядом. Выборка и вариационный ряд несут одну и ту же информацию, но с вариационным рядом легче работать в силу его упорядоченности. Если изучается величина, имеющая непрерывное распределение вероятностей, то, скорее всего, вариационный ряд не будет содержать повторяющихся значений. Если же изучается дискретная случайная величина, то при достаточно большом объёме данных в выборке будут повторяющиеся значения. Число повторений значения п1, п2, …, пk называется частотой значений выборки. Относительной (эмпирической) частотой значения называется п1/п, п2/п, …,пk – отношение числа встречаемости значения к общему объёму выборки. Сумма частот значений выборки всегда должна равняться объёму выборки. п1 + п2 + … + пk = п; Сумма относительных частот всегда должна равняться 1. п1/п + п2/п + …+ пk = 1.

3. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ.
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

1. Понятие множества и элемента множества.
2. Отношения между множествами.
3. Пересечение множеств.
4. Объединение множеств.
5. Свойства пересечения и объединения множеств.
6. Разность множеств. Дополнение подмножества.
7. Понятие разбиения множества на классы.
8. Декартово произведение множеств.
9. Число элементов в объединении, разности конечных множеств.
10. Число элементов в декартовом произведении двух или нескольких множеств.
11. Объём и содержание понятий.
12. Отношения между понятиями.
13. Определение понятий.
14. Высказывания и высказывательные формы.
15. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний и высказывательных форм.
16. Высказывания с кванторами.
17. Отрицание высказываний и и высказывательных форм.
18. Отношение следования между предложениями.
19. Отношение равносильности между предложениями.
20. Теорема. Структура теоремы. Виды теорем.
21. Понятие текстовой задачи. Структура текстовой задачи.
22. Методы и способы решения текстовой задачи.
23. Этапы решения задачи и приёмы их выполнения.
24. Моделирование в процессе решения текстовой задачи.
25. Решение задач «на части».
26. Решение задач на движение.
27. Комбинаторные задачи и их решение.
28. Из истории возникновения понятия натурального числа. Позиционные и непозиционные системы счисления.
29. Из истории развития геометрии. Свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве.
30. Понятие величины и её измерения. Из истории создания систем единиц величин.
31. Правила приближённых вычислений.
32. Методы математической статистики.

5. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины требует наличия учебного кабинета.

Технические средства обучения:

-компьютер, проектор.

Оборудование учебного кабинета:

- посадочные места по количеству обучающихся;
- рабочее место преподавателя;
- портреты выдающихся деятелей математики;

- видеофильмы по истории развития математики, математических идей и методов;
- аудиторная доска с магнитной поверхностью и набором приспособлений для крепления таблиц;
- комплект классных инструментов: линейка, транспортир, угольник (30^0, 60^0), угольник (45^0, 45^0), циркуль;
- набор геометрических фигур;
- модели объемных фигур (шар, куб, конус, цилиндр);
- таблицы;
- комплект необходимой методической документации.

5.2.Информационное обеспечение обучения.
Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет–ресурсов, дополнительной литературы.

Основные источники:

1. Стойлова Л.П. Математика - М., «Академия», 2009.

Дополнительные источники:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике - М., «Высшая шко ла», 1998.
2. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов - М., «Наука», 1980.
3. Фадеев Д.К. и др. Элементы высший математики для школьников - М., «Наука», 1987.

Периодические издания (отечественные журналы):

1. «Математика в школе»
2. «Начальная школа»

Интернет ресурсы:

1. Федеральный образовательный портал: http://www.ict.edu.ru
2. Федеральное государственное учреждение: "Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций" http://www.informika.ru/projects/infotech/
3. http://claw.ru/ - Образовательный портал
4. http://ru.wikipedia.org/ - Свободная энциклопедия

6. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Контрольи оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и лабораторных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.
Итоговым контролем освоения обучающимися дисциплины является экзамен.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания).	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения.**
умения:	
-принять математические методы для решения профессиональных задач.	Текущий контроль в форме: -тестирования; -защиты индивидуальных заданий

-решать текстовые задачи.	Текущий контроль в форме: -тестирования; -защиты индивидуальных заданий
-выполнять приближенные вычисления	Текущий контроль в форме: -тестирования; -защиты индивидуальных заданий
-проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследования, представлять полученные данные графически.	Текущий контроль в форме: -тестирования; -защиты индивидуальных заданий
знания:	
- смысл понятий множества, отношений между множествами, операция над множествами.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (экспертное суждение; дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование; защита реферата
-понятие величины и ее измерения, история создания систем единиц величины.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (экспертное суждение; дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование; защита реферата
-этапы развития понятий натурального числа и нуля, смысл понятия системы счисления.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (экспертное суждение; дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование; защита реферата
-понятие текстовой задачи и процесса её решения, этапы решения задачи и приемы их выполнения.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (экспертное суждение; дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование;
-история развития геометрии, основные свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (экспертное суждение; дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование; защита реферата

-правила приближенных вычислений, методы математической статистики.	Формы контроля обучения: – устный опрос; – активность на занятиях (дополнения к ответам сокурсников и т.п.); – тестирование.